คณิตศาสตร์ O-NET 2

ตอนที่ 1 ข้อสอบอัตนัย 10 ข้อ ข้อ 1-5 ข้อละ 2 คะแนน ข้อ 6-10 ข้อละ 3 คะแนน

1. ให้ $f(x)=1-\frac{1}{x}$ และ $g(x)=1-x$ และ $h(x)=f(g(x))$ ถ้า $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนของจำนวนเต็ม a และ b ซึ่งมี ห.ร.ม. เท่ากับ 1 และ $h(\frac{a}{b})=8$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

เฉลย 15

$$h(x)=f(g(x))=f(1-x)=1-\frac{1}{1-x}$$

ถ้า $\quad h\left(\frac{a}{b}\right)=8$

แล้ว $\quad 1-\frac{1}{1-\frac{a}{b}}=8$

$$\frac{a}{b}=\frac{8}{7}$$

ดังนั้น $\quad a+b=8+7=\mathbf{15}$

2. มีจำนวนเต็ม 4 หลักกี่จำนวนระหว่าง 1000 และ 9999 ซึ่งเลขโดดในแต่ละหลักต่างกันและเลขโดดในหลักพันกับเลขโดดในหลักหน่วยต่างกัน 2

เฉลย 840

จากเซตของเลขโดด {0, 1, 2, …, 9} มี 16 คู่ที่ต่างกัน 2 ได้แก่ (0, 2), (2,0), (1, 3), (3,1), …,(9,7) ทุกคู่สามารถใช้เป็นเลขโดดหลักพันกับหลักหน่วยตามลำดับได้ ยกเว้น (0, 2) สำหรับเลขโดดแต่ละคู่มีวิธีเติมเลขโดดที่ไม่ซ้ำกันใน 2 ตำแหน่งกลางได้ $8\times 7=56$ วิธี ดังนั้น มีจำนวนในรูปแบบที่กำหนดทั้งหมด $15\times 56=\mathbf{840}$ จำนวน

3. สำหรับข้อมูล 2, 5, 7, 10, 16 ให้ a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{5}|x_i-a|$ มีค่าน้อยที่สุด แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล 2a, a, 9, 4, 6 เท่ากับเท่าใด

เฉลย   2

จำนวนจริง a ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{5}|x_i-a|$ มีค่าน้อยที่สุด คือ มัธยฐาน ดังนั้น a = 7

สำหรับข้อมูล 2a, a, 9, 4, 6 ซึ่งก็คือ 14, 7, 9, 4,   6 มีค่าเฉลี่ยเลคณิตเท่ากับ

$$\bar{y}=\frac{14+7+9+4+6}{5}=\mathbf{8}$$

4. ถ้า $f(x)=5x^2+ax+b$ เมื่อ $a\neq b$ และ $f(a)=b$ และ $f(b)=a$ แล้ว $a-b$ เท่ากับเท่าใด

เฉลย 0.20

จาก $f(a)=b$ จะได้ $f(a)=5a^2+a^2+b=b$

$6a^2=0$

$a=0$

จาก $f(b)=a$ จะได้ $f(b)=5b^2+ab+b=a$

$5b^2+b=0 \quad (a=0)$

$b(5b+1)=0$

$b=0$ หรือ $b=-\frac{1}{5}$

แต่ $a\neq b$ ดังนั้น $b\neq 0$, $b=-\frac{1}{5}$ และจะได้ $a-b=0+\frac{1}{5}=\mathbf{\frac{1}{5}}=\mathbf{0.20}$

5. จุด $(1,a)$ และ $(-1,b)$ อยู่บนกราฟของ $y=px^2+qx+5$ ถ้า $a+b=14$ แล้ว p มีค่าเท่ากับเท่าใด

เฉลย 2

เนื่องจากจุด $(1,a)$ และ $(-1,b)$ อยู่บนกราฟของ $y=px^2+qx+5$ พิกัดของจุดคู่นี้ต้องสอดคล้องกับสมการ นั่นคือ

$$a=p(1)^2+q(1)+5=p+q+5 \qquad \ldots(1)$$

$$b=p(-1)^2+q(-1)+5=p-q+5 \qquad \ldots(2)$$

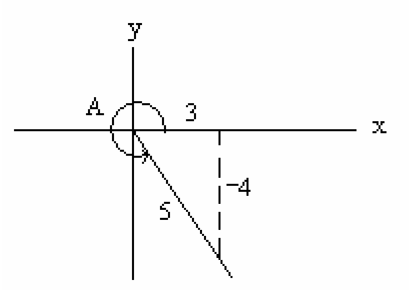
$(1)+(2):$ $a+b=2p+10$

แต่ $a+b=14$ ดังนั้น $2p+10=14$ หรือ $p=\mathbf{2}$

6. ถ้า $\cos A=\frac{3}{5}$ และ $\pi<A<2\pi$ แล้ว $\frac{-1}{\tan A+\operatorname{cosec}(-A)}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

เฉลย 12

สังเกตว่า $\cos A=\frac{3}{5}$ เป็นจำนวนบวก และ $\pi<A<2\pi$ ดังนั้น มุม A ต้องอยู่ในควอดรันต์ที่สี่ วาดรูปแสดงมุม A ดังนี้



จากรูป จะได้ $\tan A+\operatorname{cosec}(-A)=\tan A-\operatorname{cosec} A$

$$=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{12}$$

และดังนั้น $\dfrac{-1}{\tan A+\operatorname{cosec}(-A)}=\mathbf{12}$

7. ถ้า $f(x)=x^2-5x+1$ และ $g(x)=[x]=$ จำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x ค่าต่ำสุดของ $g(f(x))$ เท่ากับเท่าใด

เฉลย -6

กราฟของ f เป็นพาราโบลาปลายเปิดด้านบน(หงายขึ้น) มีจุดต่ำสุดอยู่ที่ (x_0,y_0) เมื่อ

$$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-5)}{2(1)}=\frac{5}{2}$$

และ $$y_0=f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\left(\frac{5}{2}\right)+1=-\frac{21}{4}$$

ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ $g(f(x))$ เท่ากับ $g\left(-\frac{21}{4}\right)=\left[-\frac{21}{4}\right]=\mathbf{-6}$

8. ให้ $A=\{(1,1),(1,2),1,2\}$ และ เพาเวอร์เซตของ B คือ $\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ และ $C=(B\times B)-A$ จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ C เท่ากับเท่าใด

เฉลย 4

เนื่องจาก เพาเวอร์เซตของ B คือ $\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ ดังนั้น $B=\{1,2\}$ และจะได้

$$B\times B=\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\}$$

$C=(B\times B)-A=\{(2,1),\ (2,2)\}$ ซึ่งมีสมาชิก 2 ตัว

ดังนั้น เพาเวอร์เซตของ C มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ $2^2=\mathbf{4}$

9. ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $a<b$ และ $\sqrt{1+\sqrt{21+12\sqrt{3}}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ แล้ว b^a มีค่าเท่ากับเท่าใด

เฉลย 3

ให้ $x=\sqrt{1+\sqrt{21+12\sqrt{3}}}$

$$= \sqrt{1+\sqrt{3^2 + 12\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2}}$$

$$= \sqrt{1+\sqrt{(3+2\sqrt{3})^2}}$$

$$= \sqrt{1+(3+2\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

จะได้ $x^2 = 4+2\sqrt{3}$

$$= 1+2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$$

$$= (1+\sqrt{3})^2$$

และจะได้ $x = 1+\sqrt{3} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

ดังนั้น $a = 1$ และ $b = 3$ และจะได้ $b^a = 3^1 = 3$

10. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 4 จำนวน มีพิสัย = 6 และ ฐานนิยม = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 4 จำนวนน้อยที่สุดใน 4 จำนวนนี้คือจำนวนใด

เฉลย 1

ข้อมูลชุดนี้มีฐานนิยมเท่ากับ 4 แสดงว่าต้องมี 4 ตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป

กรณีที่ 1 ข้อมูลประกอบด้วย 4 ทั้งสี่จำนวน

กรณีนี้เป็นไปไม่ได้ เพราะพิสัยเท่ากับ 6 ถ้าเป็น 4 ทั้งสี่จำนวน พิสัยจะเท่ากับ 0

กรณีที่ 2 ข้อมูลประกอบด้วย 4 สามจำนวน

เนื่องจาก ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4 ดังนั้นผลบวกของทั้งสี่จำนวนเท่ากับ $4 \times 4 = 16$

จำนวนที่สี่ต้องเป็น 4 เหมือนกับกรณีที่ 1 ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 3 ข้อมูลประกอบด้วย 4 สองจำนวน

สมมุติว่าอีกสองจำนวนคือ a และ b โดยที่ $a < b$

เนื่องจาก ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4 และพิสัยเท่ากับ 6 ดังนั้น

$a+b+4+4=16$ หรือ $a+b=8$ …(1)

และ $b-a=6$ …(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $a = \mathbf{1}$ เป็นจำนวนที่น้อยที่สุด

ตอนที่ 2 ข้อสอบปรนัย 25 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

11. จากรายงานคะแนนสอบวิชาภาษาไทยของนักเรียนห้องหนึ่ง ดังนี้

ช่วงคะแนน	**จำนวนคน**	**เกรด**
น้อยกว่าหรือเท่ากับ 14	2	0
15 - 19	6	1
20 - 24	20	2

25 - 29	12	3
มากกว่าหรือเท่ากับ 30	10	4

ให้ $\bar{x}$ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ M = ฐานนิยม ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\bar{x} = 30.25$ และ M= 22.68
2. $\bar{x} = 30.25$ และ M= 22.00
3. $\bar{x}$ หาค่าไม่ได้ และ M = 22.68
4. $\bar{x}$ หาค่าไม่ได้ และ M หาค่าไม่ได้

เฉลย 3.

เนื่องจาก ช่วงคะแนนช่วงแรกและช่วงสุดท้ายเป็นช่วงเปิด ทำให้ไม่สามารถประมาณค่าของผลรวมของคะแนนใน 2 ช่วงนี้ ดังนั้นจึงไม่สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้ สำหรับฐานนิยม M อยู่ในช่วง 20 – 24 ซึ่งมีความถี่มากที่สุด

$$M = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)I$$

$$= 19.5 + \left(\frac{14}{14+8}\right)(5)$$

$$= 22.68$$

12. ตารางต่อไปนี้แสดงค่าสรุปของข้อมูลเกี่ยวกับเวลาที่นักวิ่ง 30 คนทำได้ในการทดสอบวิ่ง 100 เมตรครั้งสุดท้ายก่อนการคัดตัวนักวิ่ง

ค่าสรุป	**นักวิ่งชาย**	**นักวิ่งหญิง**
จำนวน	20	10
ค่าเฉลี่ย	10.00	11.00
ความแปรปรวน	9.00	7.84

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. นักวิ่งชายมีความสามารถในการวิ่งแตกต่างกันน้อยกว่านักวิ่งหญิง

ข. เวลาที่ใช้วิ่งของนักวิ่งชายและนักวิ่งหญิงรวมกันมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 10.33 และความแปรปรวนเท่ากับ 8.61

ข้อใดต่อไปนี้**ถูก**

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

เฉลย 4.

พิจารณาข้อความ ก.

$$\text{CV (ชาย)} = \frac{\sqrt{9.00}}{10.00} \times 100\% = 30.00\%$$

$$\text{CV(หญิง)} = \frac{\sqrt{7.84}}{11.00} \times 100\% = 25.45\%$$

เนื่องจาก CV(ชาย) > CV(หญิง) ดังนั้น นักวิ่งชายทำเวลาในการวิ่งได้แตกต่างกันมากกว่านักวิ่งหญิง **ข้อความ ก. ผิด**

พิจารณาข้อความ ข. คำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวมจากสูตร

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

ได้ $\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{20(10.00) + 10(11.00)}{20 + 10} = 10.33$ ตรงกับที่ระบุในข้อความ ข.

คำนวณความแปรปรวนรวมจากสูตร

$$s^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}$$

ได้ $s^2 = \frac{(20)(9.00) + (10)(7.84)}{20 + 10} = 8.61$

ตรงกับที่ระบุในข้อความ ข. แต่ความจริง จากค่าสรุปที่กำหนดให้ เราไม่สามารถคำนวณความแปรปรวนรวมสำหรับนักวิ่งชายและหญิงจากสูตร $s^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}$ เพราะการคำนวณโดยสูตรนี้ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งสองชุดต้องเท่ากัน ดังนั้น ค่าที่คำนวณได้นี้ไม่ถูกต้อง **ข้อความ ข. ผิด**

13. สมการ $\left|x - |2x+1|\right| = 3$ มีคำตอบ**ที่เป็นจำนวนเต็ม**แตกต่างกันกี่จำนวน

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

เฉลย 2.

จาก $\left|x - |2x+1|\right| = 3$

จะได้ $x - |2x+1| = 3$ หรือ $x - |2x+1| = -3$

$|2x+1| = x - 3;\ x \ge 3$ หรือ $|2x+1| = x + 3;\ x \ge -3$

กรณีที่ 1 $|2x+1| = x - 3;\ x \ge 3$

$2x + 1 = x - 3$ หรือ $2x + 1 = -x + 3$

$x = -4$ หรือ $x = \frac{2}{3}$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า $x \ge 3$ ดังนั้น กรณีนี้ ไม่มีคำตอบ

กรณีที่ 2 $|2x+1| = x + 3;\ x \ge -3$

$2x + 1 = x + 3$ หรือ $2x + 1 = -x - 3$

$x = 2$ หรือ $x = -\frac{4}{3}$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้มี 2 คำตอบคือ 2 และ $-\frac{4}{3}$ และมีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มเพียงคำตอบเดียว

14. คะแนนสอบวิชาหนึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 10 คะแนนและสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ 30% ถ้าสมศรีสอบได้ 7 คะแนน แล้วคะแนนสอบของสมศรีคิดเป็นค่ามาตรฐานได้เท่าใด

1. -2 2. -1 3. 1 4. 2

เฉลย 2

คะแนนสอบวิชาหนึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 10 คะแนนและสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ 30% นั่นคือ $\bar{x} = 10$ และ $CV = 30\% = 0.30$

จาก $CV = \frac{s}{\bar{x}}$

จะได้ $0.30 = \frac{s}{10}$

$s = 3$

สมศรีได้คะแนน x = 7 คะแนน คิดเป็นค่ามาตรฐานได้

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{7 - 10}{3} = -1$$

15. ในการสำรวจความนิยมภาพยนตร์แนวต่างๆ ของนักเรียน 80 คน ได้แก่ ภาพยนตร์แนวโรแมนติก แนวบู๊ แนวสยองขวัญ พบว่า นักเรียนแต่ละคนชอบภาพยนตร์อย่างน้อยก็แนวใดแนวหนึ่ง ถ้ามีนักเรียนชอบภาพยนตร์แนวโรแมนติก 48 คน ชอบแนวบู๊ 32 คน และชอบทั้งแนวโรแมนติกและ แนวบู๊ 14 คน แล้วมีนักเรียนที่ชอบภาพยนตร์แนวสยองขวัญเพียงอย่างเดียวกี่คน

1. 12 2. 14 3. 16 4. 18

เฉลย 2.

เนื่องจาก นักเรียนแต่ละคนชอบภาพยนตร์แนวใดหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งแนว ดังนั้นจำนวนนักเรียนนักเรียนที่ชอบภาพยนตร์แนวสยองขวัญอย่างเดียวเท่ากับจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่สำรวจ ลบด้วยจำนวนนักเรียนที่ชอบภาพยนตร์แนวโรแมนติกหรือแนวบู๊

ให้ R , A และ T แทนเซตของจำนวนนักเรียนที่ชอบภาพยนตร์แนวโรแมนติก แนวบู๊ และแนวสยองขวัญ ตามลำดับ จะได้

$T \cap R' \cap A'$ แทนเซตของนักเรียนที่ชอบภาพยนตร์แนวสยองขวัญอย่างเดียว

$T \cup R \cup A$ แทนเซตของนักเรียนที่ชอบภาพยนตร์แนวใดแนวหนึ่ง

$R \cup A$ แทนเซตของนักเรียนที่ชอบภาพยนตร์แนวโรแมนติกหรือแนวบู๊อย่างใดอย่างหนึ่ง

ดังนั้น $n(T \cap R' \cap A') = n(T \cup R \cup A) - n(R \cup A)$

$$= 80 - n(R \cup A)$$

แต่ $n(R\cup A)=n(R)+n(A)-n(R\cap A)=48+32-14=66$

ดังนั้น จำนวนนักเรียนที่ชอบภาพยนตร์แนวสยองขวัญอย่างเดียวเท่ากับ

$$n(T\cap R'\cap A')=80-66=\mathbf{14}$$

16. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จงพิจารณาว่า $a+bc$ และ $(a+b)(a+c)$ เท่ากันได้หรือไม่

1. เท่ากันเสมอ
2. ไม่เท่ากันแน่นอน
3. เท่ากัน เมื่อ $a+b+c=0$
4. เท่ากัน เมื่อ $a+b+c=1$

เฉลย 4.

เพื่อให้ $a+bc=(a+b)(a+c)$

$$=a^2+ab+ac+bc$$

จะต้องให้ $a=a^2+ab+ac$

หรือ $1=a+b+c$ (หารด้วย a)

17. กำหนดให้ $f(x)=5x^2-2x-1$ ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

1. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=10x+5h-2$
2. เรนจ์ของ f คือเซตของจำนวนจริง
3. กราฟของ f มีเส้นตรง $x=\dfrac{1}{5}$ เป็นแกนสมมาตร
4. จุดบนกราฟของ f ที่อยู่ใกล้กับแกน x มากที่สุด ห่างจากแกน x เป็นระยะทาง $\dfrac{6}{5}$ หน่วย

เฉลย 2.

ข้อ 1. ถูก $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{[5(x+h)^2-2(x+h)-1]-(5x^2-2x-1)}{h}$

$$=\frac{(5x^2+10xh+5h^2-2x-2h-1)-(5x^2-2x-1)}{h}$$

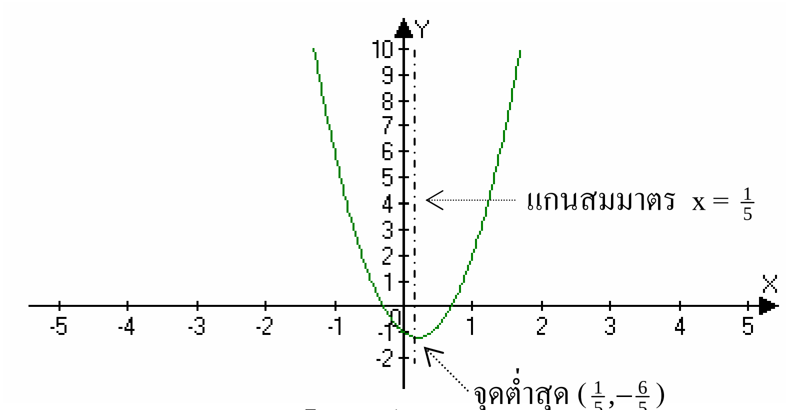
$$=\frac{10xh+5h^2-2h}{h}$$

$$=10x+5h-2$$

ข้อ 2. ผิด กราฟของ f เป็นพาราโบลาปลายเปิดด้านบน (หงายขึ้น) จุดต่ำสุดของกราฟของ f คือ (x_0,y_0) เมื่อ $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ และ $y_0=f(x_0)$ เรนจ์ของ f คือช่วง $[y_0,\infty)$

$$x_0=-\frac{(-2)}{2(5)}=\frac{1}{5}$$

$$y_0=5\left(\frac{1}{5}\right)^2-2\left(\frac{1}{5}\right)-1=-\frac{6}{5}$$



ดังนั้น เรนจ์ของ f คือช่วง $\left[-\frac{6}{5}, \infty\right)$

ข้อ 3. ถูก ดูข้อ 2

ข้อ 4. ถูก จากข้อ 2 จุดบนกราฟของ f ที่อยู่ใกล้กับแกน x มากที่สุดคือจุดต่ำสุดซึ่งห่างจากแกน x เป็นระยะทาง $\left|-\frac{6}{5}\right| = \frac{6}{5}$ หน่วย

18. กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x-7}{x+1}$ และ $f(g(x)) = x$ แล้ว $g(2)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10

เฉลย 3.

จาก $f(g(x)) = x$

$$\frac{3\cdot g(x)-7}{g(x)+1} = x$$

$$3\cdot g(x) - 7 = x\cdot g(x) + x$$

$$3\cdot g(x) - x\cdot g(x) = x + 7$$

$$(3-x)\cdot g(x) = x+7$$

$$g(x) = \frac{x+7}{3-x}$$

ดังนั้น $g(2) = \frac{2+7}{3-2} = \mathbf{9}$

19. ลากเส้นตรงจากจุด (2,–6) ไปตั้งฉากกับเส้นตรง $3y - x + 2 = 0$ ที่จุด (a, b) ค่าของ $\frac{b}{a}$ เท่ากับเท่าใด

1. -3 2. $-\frac{1}{3}$ 3. 3 4. 5

เฉลย 1.

เส้นตรง $3y - x + 2 = 0$ มีความชัน $\frac{1}{3}$ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $3y - x + 2 = 0$ มีความชัน -3 เส้นตั้งฉากนี้ผ่านจุด $(2,-6)$ และมีสมการเป็น

$$y + 6 = -3(x - 2)$$

หรือ $$3x + y = 0$$

แก้ระบบสมการ $3x + y = 0$ และ $3y - x + 2 = 0$

จะได้ $(a, b) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ เป็นจุดตัด

ดังนั้น $\frac{b}{a} = \frac{-3/5}{1/5} = \mathbf{-3}$

20. สร้างกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากจากแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 10 นิ้วและยาว 14 นิ้ว ตัดมุมเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ x นิ้วออกไปทั้งสี่มุมแล้วพับขึ้นมาจะได้กล่องสูง x นิ้ว ปริมาตรของกล่องที่ได้เท่ากับกี่ลูกบาศก์นิ้ว

1. $140x - 48x^2 + 4x^3$ 2. $140x + 48x^2 + 4x^3$

3. $140x - 24x^2 + x^3$ 4. $140x + 24x^2 + x^3$

เฉลย 1.

กล่องที่พับได้มีความกว้าง $10 - 2x$ นิ้ว ความยาว $14 - 2x$ นิ้ว และความสูง x นิ้ว ดังนั้น จะได้กล่องที่มีปริมาตร $(10 - 2x) \cdot (14 - 2x) \cdot x = \mathbf{140x - 48x^2 + 4x^3}$ ลูกบาศก์นิ้ว

21. จุดบนเส้นตรง $y = 2x - 3$ ที่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุดมีพิกัด y เท่ากับเท่าใด

1. 1.2 2. 0 3. -0.6 4. -0.8

เฉลย 3.

จุดบนเส้นตรง $y = 2x - 3$ มีพิกัดอยู่ในรูปแบบ $(x, 2x - 3)$

ระยะทางระหว่างจุด $(x, 2x - 3)$ กับจุดกำเนิดคือ

$$d = \sqrt{x^2 + (2x - 3)^2} = \sqrt{5x^2 - 12x + 9}$$

ให้ $s = d^2, d \geq 0$ ค่าของ x ซึ่งทำให้ d มีค่าต่ำสุดกับค่าของ x ที่ทำให้ s มีค่าต่ำสุดเป็นค่าเดียวกัน เราจะพิจารณาค่าต่ำสุดของ s แทน

$$s = 5x^2 - 12x + 9$$

s มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2(5)} = 1.2$

ดังนั้น จุดบนเส้นตรง $y = 2x - 3$ ที่ใกล้กับจุดกำเนิดมากที่สุดมีพิกัด x เท่ากับ 1.2 และพิกัด y เท่ากับ $2(1.2) - 3 = \mathbf{-0.6}$

22. แก้วขวัญซื้อส้ม 3 กิโลกรัมและฝรั่ง 2 กิโลกรัม ราคาเฉลี่ยของผลไม้สองชนิดรวมกันคือกิโลกรัมละ 21 บาท ถ้าส้มราคาแพงกว่าฝรั่ง กิโลกรัมละ 10 บาทแล้วส้ม 2 กิโลกรัมและฝรั่ง 3 กิโลกรัมราคารวมกันเท่ากับเท่าใด

1. 90 บาท 2. 95 บาท 3. 100 บาท 4. 105 บาท

เฉลย 2.

ส้ม 3 กิโลกรัมและฝรั่ง 2 กิโลกรัม รวมเป็น 5 กิโลกรัม ราคาเฉลี่ยรวมกัน กิโลกรัมละ 21 บาท

ดังนั้น ส้ม 3 กิโลกรัมและฝรั่ง 2 กิโลกรัมราคารวมกัน $5 \times 21 = 105$ บาท

สมมุติว่า ส้มราคากิโลกรัมละ x บาท ฝรั่งจะราคากิโลกรัมละ x – 10 บาท เพราะฝรั่งราคาถูกกว่าส้มกิโลกรัมละ 10 บาท

เนื่องจาก ส้ม 3 กิโลกรัมราคา 3x บาทและฝรั่ง 2 กิโลกรัมราคา 2(x – 10) บาท และเนื่องจากส้มและฝรั่งในปริมาณดังกล่าวราคารวมกันเป็น 105 บาท ดังนั้น

$$(3x) + 2(x - 10) = 105$$

$$x = 25$$

นั่นคือส้มราคากิโลกรัมละ 25 บาทและฝรั่งราคากิโลกรัมละ 15 บาท ดังนั้น ส้ม 2 กิโลกรัมและฝรั่ง 3 กิโลกรัม ราคารวมกัน $2(25) + 3(15) = 95$ บาท

23. กำหนดค่าของสัมประสิทธิ์ b และ c ของสมการกำลังสอง $x^2 + bx + c = 0$ โดยการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ครั้ง หน้าที่หงายขึ้นในครั้งแรกให้เป็นค่าของ b หน้าที่หงายขึ้นในครั้งที่สองให้เป็นค่าของ c ความน่าจะเป็นที่สมการกำลังสองนี้จะมีคำตอบเป็นจำนวนจริงเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{19}{36}$

เฉลย 4.

ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ครั้ง เพื่อกำหนดค่าของ b และ c จะได้แซมเปิลสเปซ

$$S = \{(b, c) \mid b = 1,2,3,\ldots,6 \text{ และ } c = 1,2,3,\ldots,6\}$$

ซึ่งประกอบด้วย (b, c) ทั้งหมดที่เป็นไปได้ $6 \times 6 = 36$ คู่

ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ได้ (b, c) ซึ่งทำให้สมการ $x^2 + bx + c = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

เนื่องจาก $x^2 + bx + c = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริง เมื่อ $b^2 - 4c \ge 0$ หรือ $b^2 \ge 4c$ ดังนั้น

$$A = \{(b, c) \mid b^2 \ge 4c\}$$

ซึ่งประกอบด้วย (b, c) ทั้งหมด 19 คู่ ได้แก่

$(2,1),$
$(3,1),(3,2),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$
$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่สมการ $b^2-4c\geq 0$ จะมีคำตอบเป็นจำนวนจริง คือ $P(A)=\dfrac{19}{36}$

24. ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $|a|=|b|$ แล้ว $a=b$
2. $\sqrt{a^2}=a$
3. ถ้า $a>b$ แล้ว $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$
4. ถ้า $a<0$ และ $b<0$ และ ถ้า $a<b$ แล้ว $a^2>b^2$

เฉลย 4.

ข้อ 1. ไม่จริง เพราะ a อาจเท่ากับ –b ก็ได้

ข้อ 2. ไม่จริง เช่น $\sqrt{(-5)^2}\neq -5$ ที่ถูกต้องคือ $\sqrt{a^2}=|a|$

ข้อ 3. ไม่จริง เช่น -2 > -5 แต่ $\dfrac{1}{(-2)}<\dfrac{1}{(-5)}$

ข้อ 4. จริง มีวิธีพิสูจน์ดังนี้

จาก	$a<b<0$	(กำหนดให้)
จะได้ว่า	$b-a>0$	
และ	$b+a<0$	
ดังนั้น	$(b-a)(b+a)<0$	
	$b^2<a^2$	
	$a^2>b^2$	

25. ถ้า $a=\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{2}}$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $-(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$
2. $(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$
3. $-(1-\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$
4. $(1-\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$

เฉลย 1.

$$a=\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}}$$
$$=\frac{1}{1-\sqrt[4]{2}}\cdot\frac{1+\sqrt[4]{2}}{1+\sqrt[4]{2}}=\frac{1+\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1+\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=-(1+\sqrt[4]{2})(1+\sqrt{2})$$

26. เครื่องจักรบรรจุข้าวถุง 2 เครื่อง เครื่องหนึ่งใช้บรรจุข้าวกล้อง ถุงละ 2 กิโลกรัม อีกเครื่องหนึ่งใช้บรรจุข้าวหอมมะลิ ถุงละ 5 กิโลกรัม น้ำหนักบรรจุของข้าวถุงที่บรรจุโดยเครื่องจักรแต่ละเครื่องแม้จะมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับที่กำหนด แต่เป็นเรื่องปกติที่น้ำหนักบรรจุของข้าวแต่ละถุงย่อมคลาดเคลื่อนจากที่กำหนดไว้บ้าง ถ้าจะเปรียบเทียบการทำงานของเครื่องจักรทั้งสองว่าเครื่องใดบรรจุข้าวได้น้ำหนักที่สม่ำเสมอกว่ากัน ควรใช้มาตรวัดทางสถิติในข้อใดต่อไปนี้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต　　2. ความแปรปรวน

3. สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน　　4. ค่ามาตรฐาน

เฉลย 3.

การเปรียบเทียบความสม่ำเสมอของน้ำหนักบรรจุของข้าวถุงที่บรรจุโดยเครื่องจักรทั้งสองเครื่องนี้ก็คือ การเปรียบเทียบว่าน้ำหนักบรรจุของข้าวถุงที่บรรจุโดยเครื่องจักรเครื่องแรกมีการกระจาย (ความแตกต่างกันของน้ำหนักบรรจุของข้าวแต่ละถุง)มากกว่า หรือเท่ากัน หรือน้อยกว่า น้ำหนักบรรจุของข้าวถุงที่บรรจุโดยใช้เครื่องจักรที่สอง มาตรวัดทางสถิติที่เหมาะสมคือมาตรวัดการกระจายสัมพัทธ์ เช่น สัมประสิทธิ์ของการแปรผันในข้อ 3.

27. ถ้า A มีสมาชิก 4 ตัว และ B มีสมาชิก 3 ตัว และ $A \cup B$ มีสับเซตที่เป็นสับเซตแท้ 31 เซตแล้ว A และ B มีสมาชิกร่วมกันกี่ตัว

1. 3　　2. 2　　3. 1　　4. 0

เฉลย 2.

เนื่องจาก $A \cup B$ มีสับเซตทั้งหมด $31+1=32=2^5$ เซต ดังนั้น $A \cup B$ มีสมาชิก 5 ตัว

(เซตที่มีสมาชิก n ตัว จะมีสับเซตทั้งหมด 2^n เซต)

จำนวนสมาชิกร่วมของ A และ B คือ $n(A \cap B)$ หาได้จากสูตร

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$5 = 4 + 3 - n(A \cap B)$$

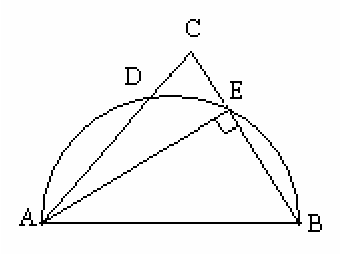
$$n(A \cap B) = 2$$

ดังนั้น A และ B มีสมาชิกร่วมกัน 2 ตัว

28. ส่วนของเส้นตรง AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมรัศมียาว 2 หน่วย และ AB เป็นด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ด้วย วงกลมดังกล่าวนี้ตัด AC และ BC ที่จุด D และ E ตามลำดับ ความยาวของ AE เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{5}{3}$　　2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　3. $\sqrt{3}$　　4. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

เฉลย 3.



จากรูป จะเห็นได้ว่า $A\hat{E}B = 90^\circ$ เพราะเป็นมุมแนบในครึ่งวงกลม ดังนั้น AE เป็นความสูงของ ΔABC และ ΔABE เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากชนิด $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$

$$\frac{AE}{AB} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

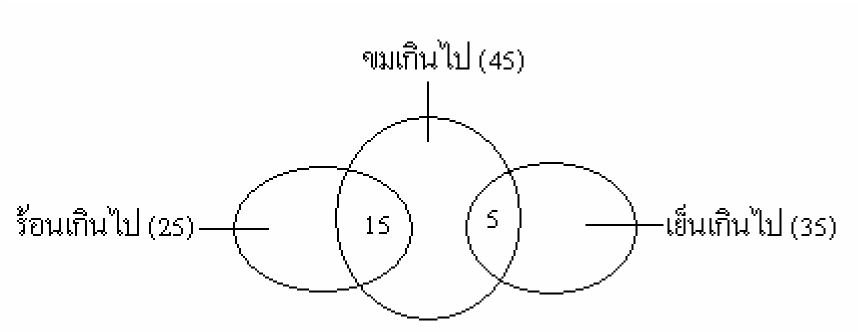
$$AE = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

29. พนักงานเตรียมกาแฟ 100 ถ้วยสำหรับผู้เข้าร่วมประชุม 100 คน ปรากฏว่า กาแฟที่เตรียมไว้ 25 ถ้วยร้อนเกินไป, 35 ถ้วยเย็นเกินไป, 45 ถ้วยขมเกินไป, 15 ถ้วยขมเกินไปและร้อนเกินไป, 5 ถ้วยเย็นเกินไปและขมเกินไป, นอกนั้นอุณหภูมิและความขมพอเหมาะ มีกาแฟทั้งหมดกี่ถ้วยที่มีอุณหภูมิและความขมพอเหมาะ

1. 10 2. 15 3. 20 4. 25

เฉลย 2.

สังเกตว่า กาแฟที่ร้อนเกินไปและเย็นเกินไปไม่มีแน่นอน ดังนั้นแผนภาพของเวนน์-ออยเลอร์ แทนเซตต่างๆเป็นดังนี้



จากแผนภาพ จะเห็นได้ว่า

กาแฟที่มีอุณหภูมิพอเหมาะแต่ขมเกินไปมี $45 - 15 - 5 = 25$ ถ้วย

กาแฟที่ร้อนเกินไปมี 25 ถ้วย

กาแฟที่เย็นเกินไปมี 35 ถ้วย

ดังนั้น กาแฟที่มีอุณหภูมิและความขมพอเหมาะมี $100 - (25 + 25 + 35) = \mathbf{15}$ ถ้วย

30. ถ้า $0 < a < 1$ และ b เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจำนวนใดต่อไปนี้มีค่ามากที่สุด

1. $\frac{a}{b}$ 2. $\frac{b}{a}$ 3. a^b 4. $b-a$

เฉลย 2

เนื่องจาก $0<a<1$ และ $b\geq 1$ (b เป็นจำนวนเต็มบวก) …(1)

จะได้ $\frac{a}{b}\leq a<1$ …(2)

และ $\frac{1}{a}>1$

ดังนั้น $\frac{1}{a}(b)=\frac{b}{a}>b$ (เพราะ $b\geq 1$) …(3)

$a^b\leq a<1$ …(4)

$b-a<b$ …(5)

เปรียบเทียบค่าของ $\frac{a}{b},\frac{b}{a},a^b$ และ $b-a$ ใน (1)-(5) จะเห็นได้ว่า $\frac{b}{a}$ มีค่ามากกว่าจำนวนอื่นๆที่กำหนดให้

31. คำตอบของอสมการ $\frac{2x^2-3x+4}{x^2+2}>1$ คือช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-\infty,1)\cup(2,\infty)$ 2. $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$ 3. $(1,2)$ 4. $(-2,-1)$

เฉลย 1.

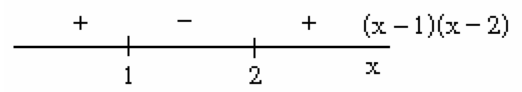
จาก $\frac{2x^2-3x+4}{x^2+2}>1$

จะได้ $2x^2-3x+4>x^2+2$ (คูณด้วย x^2+2 ซึ่งมากกว่า 0)

$x^2-3x+2>0$

$(x-1)(x-2)>0$

แก้อสมการโดยใช้เส้นจำนวนแสดงเครื่องหมายของข้างซ้ายของอสมการดังนี้



จากแผนภาพ จะเห็นได้ว่า $(x-1)(x-2)>0$ เมื่อ $x<1$ หรือ $x>2$

ดังนั้นเซตคำตอบของอสมการคือ $\mathbf{(-\infty,1)\cup(2,\infty)}$

32. เรนจ์ของฟังก์ชัน $f(x)=|x-1|+x-1$ คือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $[1,\infty)$ 2. $(1,\infty)$ 3. $[0,\infty)$ 4. $(0,\infty)$

เฉลย 3.

โดเมนของ f คือเซตของจำนวนจริง

เมื่อ $x<1$ จะได้ $|x-1|=-x+1$

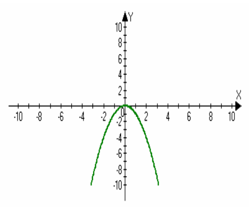
$$f(x) = -x+1+x-1 = 0$$

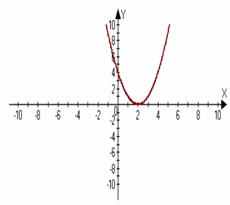
เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ $|x-1| = x-1$

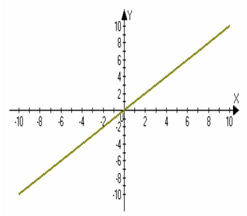
$$f(x) = x-1+x-1 = 2x-2 \geq 0$$

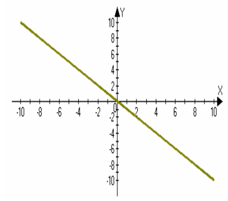
ดังนั้น เรนจ์ของ f คือ $[0,\infty)$

33. กราฟของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้มีสมบัติ “$(x,y)\in r$ ก็ต่อเมื่อ $(-x,y)\in r$”

1. 

2. 

3. 

4. 

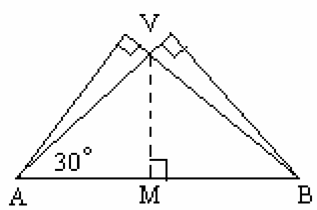
เฉลย 1.

สังเกตว่า จุด (x, y) กับจุด (-x, y) เป็นภาพสะท้อนของกันและกันโดยมีแกน y เป็นเสมือนกระจกเงาสะท้อนภาพ นั่นคือ ความสัมพันธ์ที่มีสมบัติที่กำหนดให้มีกราฟที่สมมาตรโดยมีแกน y เป็นแกนสมมาตร จะเห็นได้ว่า มีเพียงกราฟของความสัมพันธ์ในข้อ 1. เท่านั้นที่มีสมบัติดังกล่าว

34. รูปสามเหลี่ยมที่มีมุม $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ สองรูปเท่ากันทุกประการ มีส่วนหนึ่งซ้อนกัน ตั้งอยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉากร่วมกัน ถ้าด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 12 หน่วย แล้วพื้นที่ส่วนที่ซ้อนกันของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งสองเท่ากับกี่ตารางหน่วย

1. $6\sqrt{3}$ 2. $8\sqrt{3}$ 3. $9\sqrt{3}$ 4. $12\sqrt{3}$

เฉลย 4.



จากรูป MV คือความสูงของ ΔABV เนื่องจาก ΔAMV เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$

หา MV จากความสัมพันธ์

$$\frac{MV}{AM} = \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

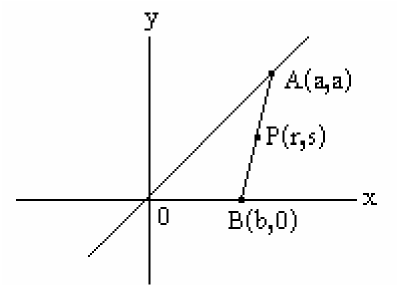
จะได้ $MV = AM \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

ดังนั้น พื้นที่ของ $\Delta ABV = \frac{1}{2}(AB)(MV) = \frac{1}{2}(12)(2\sqrt{3}) = \mathbf{12\sqrt{3}}$ ตารางหน่วย

35. ให้ A และ B เป็นจุดบนเส้นตรง $y = x$ และ $y = 0$ ตามลำดับ ถ้า $P(r, s)$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ ถ้า ความยาวของ AB เท่ากับ 4 หน่วย แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $r^2 + s^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$
2. $r^2 + s^2 = 4$
3. $r^2 + 3s^2 = 4(1 + rs)$
4. $r^2 + 5s^2 = 4(1 + rs)$

เฉลย 4.



ให้ A และ B มีพิกัด (a, a) และ (b, 0) ตามลำดับ เนื่องจาก (r, s) เป็นจุดกึ่งกลางของ AB ดังนั้น

$$r = \frac{a+b}{2} \quad \text{และ} \quad s = \frac{a+0}{2} = \frac{a}{2} \qquad \ldots(1)$$

เนื่องจาก $AB = 4$

จะได้ $PB = 2$

$$\sqrt{(r-b)^2 + (s-0)^2} = 2$$

$$(r-b)^2 + s^2 = 4 \qquad \ldots(2)$$

จาก (1) จะได้ $b = 2r - 2s$ แทนค่าใน (2) จะได้

$$(r - 2r + 2s)^2 + s^2 = 4$$

$$4s^2 - 4rs + r^2 + s^2 = 4$$

$$\mathbf{r^2 + 5s^2 = 4(1 + rs)}$$