เรขาคณิตวิเคราะห์

1. ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

ให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใดๆ ในระนาบ $R \times R$ **ระยะทางระหว่าง P และ Q** เขียนแทนด้วย PQ หาได้จากสูตร

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

หรือ

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

ให้ $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ และ $R(x_3, y_3)$ เป็นจุดยอดของ Δ PQR **อ่านทวนเข็มนาฬิกา** พื้นที่ของ Δ PQR หาได้จากสูตร

$$\text{พื้นที่ } \Delta \text{ PQR} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

เขียนพิกัดของจุดยอด P, Q, R, P
นำผลคูณตามแนวทแยง**ลง**มาบวก
นำผลคูณตามแนวทแยง**ขึ้น**มาลบ

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

3. จุดแบ่งส่วนของเส้นตรง

ให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดใดๆ ในระนาบ $R \times R$ และ $D(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง PQ ซึ่งแบ่ง PQ ออกเป็นอัตราส่วน $\frac{PD}{PQ} = \frac{a}{b}$ แล้วพิกัดของจุด D หาได้จากสูตร

$$x = x_1 + \frac{a}{b}(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \frac{a}{b}(y_2 - y_1)$$

ในกรณีที่ $D(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ นั่นคือ $\frac{PD}{PQ} = \frac{1}{2}$ จะได้

$$x = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

4. ความชันของเส้นตรง

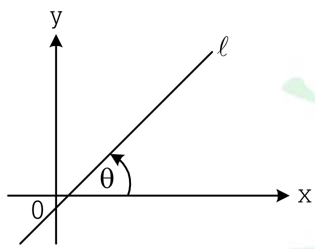
1. ให้ $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดบนเส้นตรง ℓ **ความชัน**ของเส้นตรง ℓ เขียนแทนด้วย m หาได้จากสูตร

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

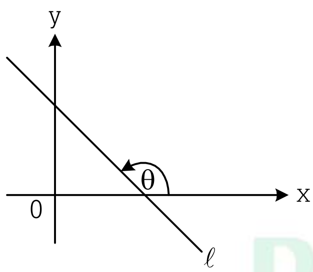
2. ความชัน m อาจนิยามโดยใช้ตรีโกณมิติได้ดังนี้

ให้ θ เป็นมุมที่เส้นตรง ℓ กระทำกับแกน x ด้านบวกโดยใช้แกน x ด้านบวกเป็นด้านเริ่มต้น วัดเวียนทวนเข็มนาฬิกาถึงเส้นตรง ℓ เป็นด้านสิ้นสุด เรียก θ ว่า**มุมเอียง**ของเส้นตรง ℓ สังเกตว่า $0 \le \theta < \pi$

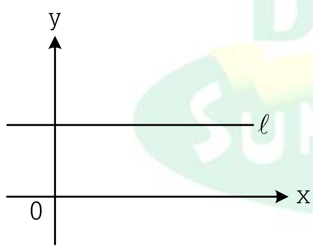
ความชันของ ℓ คือ แทนเจนต์ของมุมเอียง $m = \tan\theta$



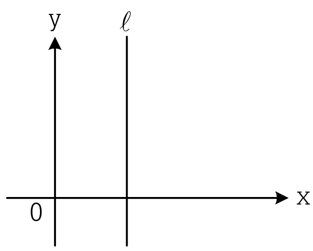
ถ้า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $m = \tan\theta > 0$



ถ้า $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ แล้ว $m = \tan\theta < 0$



ถ้า $\theta = 0$ (ℓ เป็นเส้นแนวนอน) แล้ว $m = \tan\theta = 0$

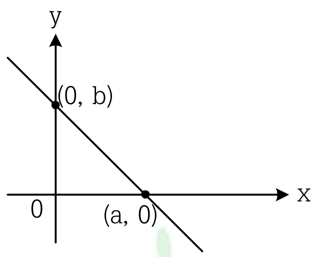


ถ้า $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ℓ เป็นเส้นแนวตั้ง) แล้ว $m = \tan\theta$ หาค่าไม่ได้

5. เส้นตรง

1. ระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y

ถ้าเส้นตรง ℓ ตัดแกน x ที่จุด (a, 0) และตัดแกน y ที่จุด (0, b) แล้วเรียก a ว่า**ระยะตัดแกน x** และเรียก b ว่า**ระยะตัดแกน y**



2. สมการของเส้นตรง

1. **รูปแบบทั่วไป** $Ax + By + C = 0$, A, B และ C เป็นค่าคงตัว
2. **รูปแบบความชันและระยะตัดแกน y** $y = mx + b$ เมื่อ m คือความชัน และ b คือระยะตัดแกน y
3. **รูปแบบจุดและความชัน** $y - y_1 = m(x - x_1)$ เมื่อ m คือความชัน และ (x_1, y_1) คือจุดหนึ่งบนเส้นตรง
4. **รูปแบบจุดสองจุด** $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ เมื่อ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เป็นจุด 2 จุดบนเส้นตรง
5. **รูปแบบระยะตัดแกน** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ เมื่อ a และ b คือระยะตัดแกน x และระยะตัดแกน y ตามลำดับ

3. สมการของเส้นแนวนอนและเส้นแนวตั้ง

เส้นแนวนอนที่ผ่านจุด (x_1, y_1) มีสมการเป็น $y = y_1$

เส้นแนวตั้งที่ผ่านจุด (x_1, y_1) มีสมการเป็น $x = x_1$

4. เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

ให้ ℓ_1 และ ℓ_2 เป็นเส้นตรงที่ไม่ใช่เส้นแนวตั้งและมีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ

1. ℓ_1 และ ℓ_2 ขนานกันก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$
2. ℓ_1 และ ℓ_2 ตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ $m_1m_2 = -1$ หรือ $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

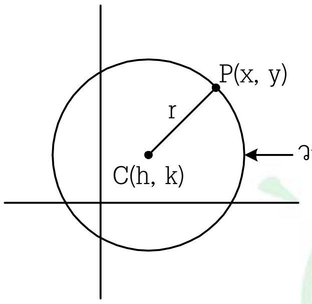
5. จุดตัดของเส้นตรง จุดตัด (x, y) ของเส้นตรง $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ และ $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ คือคำตอบของระบบสมการ $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$

6. ระยะทางระหว่างจุดและเส้นตรง ระยะทาง d ระหว่างจุด (x_1, y_1) กับเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ หาได้จากสูตร $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

7. ระยะทางระหว่างเส้นขนาน ระยะทาง d ระหว่างเส้นขนาน $Ax + By + C_1 = 0$ และ $Ax + By + C_2 = 0$ หาได้จากสูตร $d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

6. วงกลม

1. วงกลม คือ เซตของทุกจุดในระนาบซึ่งห่างจากจุดตรึงจุดหนึ่งเป็นระยะทางคงที่ เรียกจุดตรึงนั้นว่า **จุดศูนย์กลาง** และเรียกระยะทางคงตัวนั้นว่า **รัศมี**ของวงกลม



วงกลมที่มี C เป็นศูนย์กลาง และ r เป็นรัศมี

P(x, y) เป็นจุดใดๆ บนวงกลม

C เป็นจุดตรึง และ r = |CP| = ระยะทางคงตัว

2. สมการของวงกลม

1. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมี r มีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

2. สมการของวงกลมสามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปได้เป็น

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A \neq 0)$$ (สัมประสิทธิ์ของ x^2 เหมือนกับของ y^2)

3. กราฟของสมการในรูปแบบ

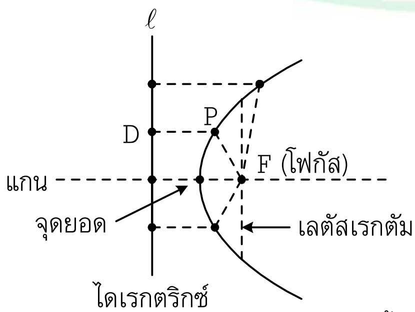
$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A \neq 0)$$

เป็นวงกลม (ถ้า $D^2 + E^2 - 4AF > 0$) หรือเป็นจุด 1 จุด (ถ้า $D^2 + E^2 - 4AF = 0$)

หรือไม่มีกราฟบนระนาบ $R \times R$ (ถ้า $D^2 + E^2 - 4AF < 0$)

7. พาราโบลา

1. พาราโบลา คือ เซตของทุกจุดในระนาบซึ่งห่างจากจุดตรึงจุดหนึ่ง เรียกว่า **โฟกัส** และเส้นตรงตรึงเส้นหนึ่งที่ไม่ผ่านโฟกัส เรียกว่า **ไดเรกตริกซ์** เป็นระยะทางเท่ากัน



P เป็นจุดบนพาราโบลา

F เป็นโฟกัสและ ℓ เป็นไดเรกตริกซ์

|PF| = |PD|

เส้นตรงซึ่งผ่านโฟกัสของพาราโบลาและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ เรียกว่า **แกน**ของพาราโบลา จุดตัดของพาราโบลากับแกนของพาราโบลาเรียกว่า **จุดยอด**ของพาราโบลา ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด 2 จุดใดๆ ของ

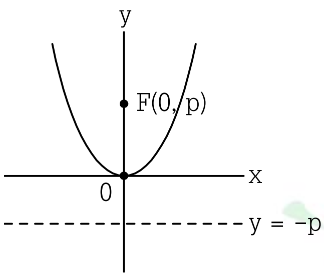
พาราโบลาเรียกว่า **คอร์ด**ของพาราโบลา คอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านจุดโฟกัส เรียกว่า **เลตัสเรกตัม**

2. สมการของพาราโบลา

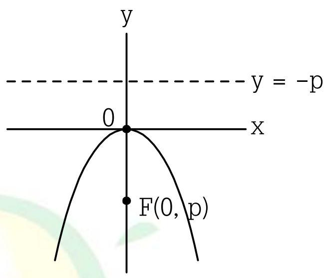
1. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0) มี 2 รูปแบบ คือ

$x^2 = 4py$ (แกนของพาราโบลาคือแกน y)

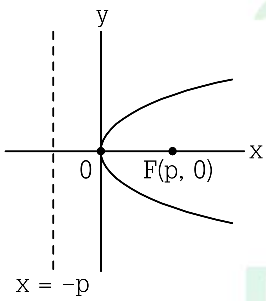
$y^2 = 4px$ (แกนของพาราโบลาคือแกน x)



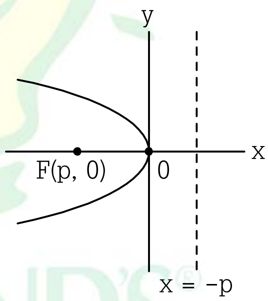
$x^2 = 4py,\ \ p > 0$



$x^2 = 4py,\ \ p < 0$



$y^2 = 4px,\ \ p > 0$



$y^2 = 4px,\ \ p < 0$

ความหมายของ p ในสมการของพาราโบลา

p = ระยะทางระหว่างจุดยอดและโฟกัส

= ระยะทางระหว่างจุดยอดและไดเรกตริกซ์

เครื่องหมายของ p บอกให้ทราบว่าพาราโบลาปลายเปิดด้านบนหรือด้านล่าง ด้านขวาหรือด้านซ้าย

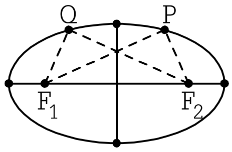
2. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ (h, k) มี 2 รูปแบบเช่นกัน คือ

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ แกนของพาราโบลาขนานกับแกน y
โฟกัสอยู่ที่ (h, k + p)
ไดเรกตริกซ์ คือ $y = k - p$
พาราโบลารูปนี้ก็คือพาราโบลา $x^2 = 4px$ ที่เลื่อนจุดยอดไปอยู่ที่ (h, k)

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ แกนของพาราโบลาขนานกับแกน x
โฟกัสอยู่ที่ $(h + p, k)$
ไดเรกตริกซ์ คือ $x = h - p$
พาราโบลารูปนี้ก็คือพาราโบลา $y^2 = 4px$ ที่เลื่อนจุดยอดไปอยู่ที่ (h, k)

8. วงรี

1. วงรี คือ เซตของจุด (x, y) ทุกจุดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุด (x, y) ถึงจุดตรึง 2 จุด **(โฟกัส)** มีค่าคงตัวเสมอ



P และ Q เป็นจุด 2 จุดใดๆ บนวงรีซึ่งมี F_1 และ F_2 เป็นโฟกัส

$$PF_1 + PF_2 = QF_1 + QF_2$$

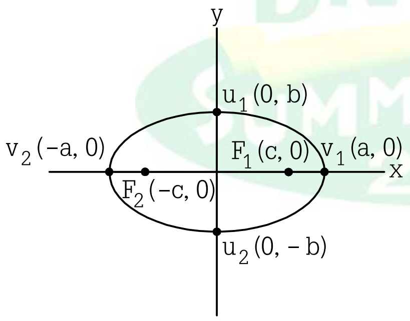
ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด 2 จุดบนวงรี เรียกว่า **คอร์ด**ของวงรี คอร์ดที่ผ่านโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **แกนเอก** จุดปลายแกนเอก เรียกว่า **จุดยอด** คอร์ดที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับแกนเอกเรียกว่า **แกนโท** จุดที่แกนเอกและแกนโทตัดกันเรียกว่า **จุดศูนย์กลางของวงรี** คอร์ด 2 เส้นที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่โฟกัสเรียกว่า **เลตัสเรกตัม**ของวงรี

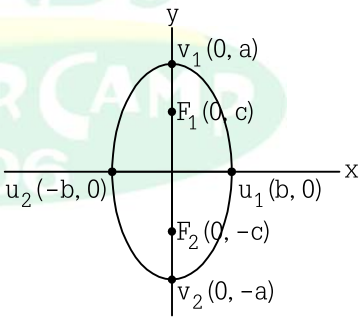
2. สมการของวงรี

1. วงรีที่มีจุดศูนย์กลาง (0, 0) มี 2 รูปแบบ เมื่อ $a > b > 0$ และ $c^2 = a^2 - b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{(แกนเอกอยู่บนแกน x)}$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{(แกนเอกอยู่บนแกน y)}$$





ความหมายของ a, b, c ในสมการของวงรี

a คือ ระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด b คือ ระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดปลายของแกนโท และ c คือ ระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส อัตราส่วน $\frac{c}{a}$ เท่ากับความเยื้องศูนย์กลางแทนด้วย e ค่าของ a, b และ c มีความสัมพันธ์กันโดย $c^2 = a^2 - b^2$

2. วงรีที่มีจุดศูนย์กลาง (h, k) เมื่อ $a > b > 0$ และ $c^2 = a^2 - b^2$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

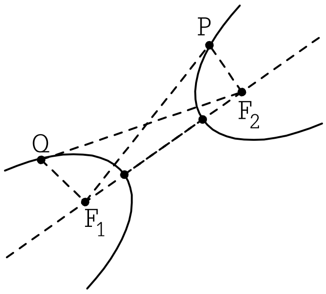
แกนเอกขนานกับแกน x
โฟกัสอยู่ที่ $(h \pm c,\ k)$
จุดยอดอยู่ที่ $(h \pm a,\ k)$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

แกนเอกขนานกับแกน y
โฟกัสอยู่ที่ $(h,\ k \pm c)$
จุดยอดอยู่ที่ $(h,\ k \pm a)$

9. ไฮเพอร์โบลา

1. ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุด (x, y) ทุกจุดในระนาบซึ่งค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระหว่างระยะทางจากจุด (x, y) ถึงจุดตรึง 2 จุด **(โฟกัส)** มีค่าคงตัวเสมอ



P และ Q เป็นจุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัส F_1 และ F_2

$$|PF_1 - PF_2| = |QF_1 - QF_2|$$

ไฮเพอร์โบลาประกอบด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น ไม่ตัดกัน เรียกแต่ละเส้นว่า **กิ่ง**

จุดตัดของไฮเพอร์โบลากับเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสองเรียกว่า **จุดยอด** (มี 2 จุด) ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอด เรียกว่า **แกนตามขวาง** จุดกึ่งกลางของแกนตามขวางเรียกว่า **จุดศูนย์กลาง**ของไฮเพอร์โบลา ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อม 2 จุดใดๆ บนกิ่งเดียวกันเรียกว่า **คอร์ด** คอร์ดที่ผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนตามขวางเรียกว่า **เลตัสเรกตัม**

2. สมการของไฮเพอร์โบลา

1. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลาง (0, 0) มี 2 รูปแบบ เมื่อ a, b > 0 และ $c^2 = a^2 + b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(แกนตามขวางอยู่บนแกน x)}$$

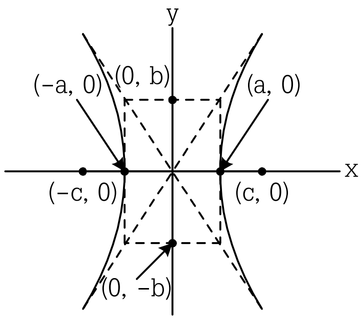
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{(แกนตามขวางอยู่บนแกน y)}$$

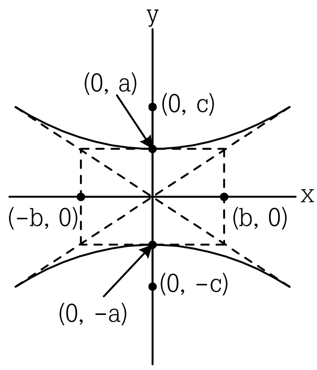
ความหมายของ a, b, c ในสมการไฮเพอร์โบลา

a คือ ระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด

c คือ ระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส

ค่าของ a, b, c มีความสัมพันธ์กันตามสมการ $c^2 = a^2 + b^2$





$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

2. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลาง (h, k) เมื่อ a, b > 0 , $c^2 = a^2 + b^2$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

แกนตามขวางขนานกับแกน x
โฟกัสอยู่ที่ $(h \pm c,\ k)$
จุดยอดอยู่ที่ $(h \pm a,\ k)$
เส้นกำกับ $y = \pm\frac{b}{a}(x - h) + k$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

แกนตามขวางขนานกับแกน y
โฟกัสอยู่ที่ $(h,\ k \pm c)$
จุดยอดอยู่ที่ $(h,\ k \pm a)$
เส้นกำกับ $y = \pm\frac{a}{b}(x - h) + k$

3. ไฮเพอร์โบลาที่มีเส้นกำกับตั้งฉากกัน เรียกว่า **ไฮเพอร์โบลามุมฉาก**

แบบทดสอบ

1. กำหนดให้เส้นตรง x = y ตัดวงรี $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ ที่จุด A และ B ถ้า F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรีนี้แล้ว $AF_1 + AF_2 + BF_1 + BF_2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด **(ตอบ 12)**

2. กำหนดให้พาราโบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น $y^2 - 4y - 16x - 12 = 0$ ถ้า ℓ เป็นเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสของพาราโบลารูปนี้และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - 2y + 5 = 0$ แล้วระยะตัดแกน y ของเส้นตรง ℓ มีค่าเท่ากับเท่าใด
(ตอบ 4)

3. ข้อใด**ผิด**

1) เส้นตรง $y = 3x + 2$ ขนานกับเส้นตรง $3x - y - 4 = 0$

2) เส้นตรง $y + 5x + 8 = 0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $5y = x + 3$

3) ระยะห่างระหว่างจุด (0, 0) กับเส้นตรง $3x + 4y - 10 = 0$ เท่ากับ 2

*4) ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $x - 2y + 5 = 0$ กับเส้นตรง $x - 2y - 5 = 0$ เท่ากับ 2

4. กำหนดให้วงกลม $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ ตัดแกน y ที่จุด 2 จุด แต่ไม่ตัดแกน x ข้อความในข้อใดเป็น**จริง**

1) $a^2 > c$ และ $b^2 > c$ 2) $a^2 > c$ และ $b^2 < c$

*3) $a^2 < c$ และ $b^2 > c$ 4) $a^2 < c$ และ $b^2 < c$

5. กำหนดให้ A เป็นจุดจุดหนึ่งบนไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ ถ้าระยะห่างระหว่างจุด A และจุดโฟกัสจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลา คือ 3 หน่วย แล้วระยะห่างระหว่างจุด A กับจุดโฟกัสอีกจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลามีค่าเท่ากับกี่หน่วย **(ตอบ 9)**

6. กำหนดให้ P คือ พาราโบลา $x^2 + 8y + 2x + a = 0$ โดยที่ $a < 0$ และมีเส้นตรง $y = 4$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ ถ้า P ตัดแกน x ทางลบที่จุด A แล้วเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุดยอดของ P มีความชันเท่ากับเท่าใด **(ตอบ 0.5)**

7. ให้ A เป็นจุดในควอดรันต์ที่หนึ่ง และเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม C ซึ่งมีรัศมี 3 หน่วย ถ้า C ผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา $2y^2 - 12y - 3x^2 + 6x + 9 = 0$ แล้วระยะทางจากจุดกำเนิดไปยังจุด A มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) $\sqrt{15}$ *2) $\sqrt{18}$ 3) $\sqrt{20}$ 4) $\sqrt{24}$

8. กำหนดให้วงกลม C มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $y = 1 - 8(x - 2)^2$ ถ้าเส้นตรง $3x - 4y + 5 = 0$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม C แล้วจุดในข้อใดอยู่บนวงกลม C

1) $(0, 1 + \sqrt{5})$ 2) $(1 - 2\sqrt{2}, 0)$ *3) $(-1, -1)$ 4) $(2, -2)$

9. ให้ H เป็นไฮเพอร์โบลา $12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0$ ซึ่งมีจุดโฟกัสคือ F_1 และ F_2 ให้ E เป็นวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ H โดยมี F_1 และ F_2 เป็นจุดยอด และสัมผัสกับแกน y ถ้า E ตัดแกน x ที่จุด A และ B แล้ว AB ยาวเท่ากับข้อใด

1) $\sqrt{8}$ หน่วย *2) $\sqrt{7}$ หน่วย 3) $\sqrt{6}$ หน่วย 4) $\sqrt{5}$ หน่วย

10. ให้ E เป็นวงรีซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ บนวงรี E ไปยังจุด (−3, 2) และ (5, 2) เท่ากับ 12 หน่วย ถ้า A และ B เป็นจุดยอดของวงรี E และวงรี E ตัดแกน y ที่จุด C และ D แล้วพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับข้อใด

*1) $10\sqrt{5}$ ตารางหน่วย 2) $20\sqrt{5}$ ตารางหน่วย

3) $10\sqrt{7}$ ตารางหน่วย 4) $20\sqrt{7}$ ตารางหน่วย

11. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงและ A(a, 1), B(−5, −4), C(1, −2) และ D(2, 3) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ถ้า ℓ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ AC และผ่านจุดกึ่งกลางของด้าน AC แล้วสมการของเส้นตรง ℓ คือสมการในข้อใด

*1) $5x - 3y + 6 = 0$ 2) $5x - 3y - 6 = 0$ 3) $5x + 3y + 9 = 0$ 4) $5x + 3y - 9 = 0$

12. ถ้าไฮเพอร์โบลา H มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ จุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองจุดของวงรีนี้ และผ่านจุด (5, 5) แล้วจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา H คือจุดในข้อใด

1) $\left(1-\frac{7}{\sqrt{11}}, 2\right)$ และ $\left(1+\frac{7}{\sqrt{11}}, 2\right)$ 2) $\left(1-\frac{8}{\sqrt{11}}, 2\right)$ และ $\left(1+\frac{8}{\sqrt{11}}, 2\right)$

3) $\left(1-\frac{9}{\sqrt{11}}, 2\right)$ และ $\left(1+\frac{9}{\sqrt{11}}, 2\right)$ *4) $\left(1-\frac{10}{\sqrt{11}}, 2\right)$ และ $\left(1+\frac{10}{\sqrt{11}}, 2\right)$

13. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลาง (h, k) อยู่บนเส้นตรง $2x + 3y = 6$ โดยที่ h, k เป็นจำนวนเต็ม ถ้าวงกลมนี้มีเส้นตรง $2x - y = 1$ และเส้นตรง $2x + y = -3$ เป็นเส้นสัมผัสแล้วความยาวรัศมีของวงกลมนี้อยู่ในช่วงใด

1) [2, 4] 2) [4, 5] *3) [5, 6] 4) [6, 7]

14. กำหนดให้ F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $x^2 + 6x - y^2 - 14y - 41 = 0$ ให้ $P_1(0, y_1)$ และ $P_2(0, y_2)$ เป็นจุด 2 จุดที่ทำให้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $P_1F_1F_2$ และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $P_2F_1F_2$ ต่างก็เท่ากับ $2\sqrt{2}$ ตารางหน่วย แล้ว $|y_1^2 - y_2^2|$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 28 *2) 56 3) 84 4) 120

15. กำหนดให้ P เป็นพาราโบลา $y^2 - 2y - 8x - 7 = 0$ ซึ่งมี ℓ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ สมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของ P และมี ℓ เป็นเส้นสัมผัสคือข้อใด

1) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 14 = 0$ 2) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

3) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ *4) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0$

ตรรกศาสตร์

1. ประพจน์และค่าความจริง

ประพจน์ คือ ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีค่าความจริงเป็น**จริง** หรือเป็น**เท็จ** อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น โดยทั่วไปจะแทนประพจน์ด้วยตัวอักษร p, q, r, s, ... และแทนค่าความจริง "จริง" และ "เท็จ" ด้วย T และ F ตามลำดับ

2. การเชื่อมประพจน์และนิเสธของประพจน์

1. การรวมประพจน์ อาจใช้ตัว**เชื่อม** "และ" "หรือ" "ถ้า ... แล้ว ..." และ "ก็ต่อเมื่อ" ประพจน์ที่ได้เรียกว่า**ประพจน์ประกอบ** ประพจน์เริ่มต้นที่นำมาเชื่อมกัน เรียกว่า **ประพจน์ย่อย** ค่าความจริงของประพจน์ประกอบเป็นไปตามข้อตกลงต่อไปนี้

ประพจน์ประกอบ	สัญลักษณ์	ค่าความจริง
p และ q	$p \wedge q$	$p \wedge q$ เป็นจริงเมื่อ p และ q เป็นจริงทั้งคู่เท่านั้น
p หรือ q	$p \vee q$	$p \vee q$ เป็นเท็จเมื่อ p และ q เป็นเท็จทั้งคู่เท่านั้น
ถ้า p แล้ว q	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow q$ เป็นเท็จเมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จเท่านั้น
p ก็ต่อเมื่อ q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$ เป็นเท็จเมื่อ p และ q มีค่าความจริงต่างกัน

ตามข้อตกลงข้างบนนี้ สามารถเขียนตารางค่าความจริงของประพจน์ประกอบได้ดังนี้

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T✓	T	T	T
T	F	F	T	F✓	F✓
F	T	F	T	T	F✓
F	F	F	F	T	T

เครื่องหมาย ✓ แสดงกรณีที่ใช้ช่วยจำ ตัวอย่างเช่น จำว่า p และ q เป็นจริง เมื่อ p และ q เป็นจริงทั้งคู่เพียงกรณีเดียว

2. สำหรับประพจน์ประกอบ $p \Rightarrow q$ เป็นประโยคเงื่อนไข เรียก p ว่า**เหตุ** และเรียก q ว่า**ผล** ประโยคเงื่อนไขต่อไปนี้มีความหมายเหมือนกัน

"ถ้า p แล้ว q" "q ถ้า p" "เพราะว่า p ดังนั้น q" "จาก p จะได้ q"

3. **นิเสธ**ของประพจน์ p ใดๆ คือ ประโยคปฏิเสธของประพจน์นั้น เขียนแทนด้วย $\sim p$ และมีค่าความจริงตรงข้ามกับ p

3. รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน

1. รูปแบบของประพจน์ 2 รูปแบบใดๆ ที่มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี กล่าวว่าเป็น**รูปแบบที่สมมูลกัน** และสามารถใช้แทนกันได้ ใช้สัญลักษณ์ $\equiv$ แทนการสมมูลกัน

2. รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกันที่ควรทราบ ได้แก่

1. $\sim(\sim p) \equiv p$
2. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ (กฎการเปลี่ยนกลุ่ม)
3. $(p \vee q) \vee r \equiv (p \vee q) \vee r$ (กฎการเปลี่ยนกลุ่ม)
4. $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$
5. $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
6. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ (กฎของเดอ มอร์กอง)
7. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (กฎของเดอ มอร์กอง)
8. $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
9. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (กฎการแจกแจง)
10. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (กฎการแจกแจง)

ข้อสังเกต 1. กำหนดประโยคเงื่อนไข $p \Rightarrow q$

เรียก $q \Rightarrow p$ ว่า**บทกลับ**ของ $p \Rightarrow q$

เรียก $\sim p \Rightarrow \sim q$ ว่า**บทผกผัน**ของ $p \Rightarrow q$

เรียก $\sim q \Rightarrow \sim p$ ว่า**บทแย้งสลับที่**ของ $p \Rightarrow q$

2. $p \Rightarrow q$ ไม่สมมูลกับ $q \Rightarrow p$

$p \Rightarrow q$ ไม่สมมูลกับ $\sim p \Rightarrow \sim q$

$p \Rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \Rightarrow \sim p$

4. สัจนิรันดร์

1. รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณีเรียกว่า**สัจนิรันดร์** เช่น $p \vee \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์ เพราะมีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

2. การตรวจสอบว่ารูปแบบประพจน์ที่กำหนดให้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ นอกจากจะพิจารณาค่าความจริงทุกๆ กรณี โดยใช้ตารางค่าความจริงแล้วอาจพิจารณาว่าประพจน์ในรูปแบบที่กำหนดสามารถเป็นเท็จได้หรือไม่ ถ้าเป็นเท็จไม่ได้เลยก็ต้องเป็นจริงเสมอ นั่นคือเป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง ให้ p และ q เป็นประพจน์ จงพิจารณาว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow r$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ สมมติว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ เป็นเท็จ

จะได้ว่า $\begin{cases} (p \Rightarrow q) \wedge q & \text{เป็นจริง} \quad ...(1) \\ p & \text{เป็นเท็จ} \quad ...(2) \end{cases}$

จาก (1) จะได้ $\begin{cases} p \Rightarrow q & \text{เป็นจริง} \quad ...(3) \\ q & \text{เป็นจริง} \quad ...(4) \end{cases}$

จาก (2) และ (3) จะเห็นได้ว่าประพจน์ที่กำหนดให้เป็นเท็จได้ในกรณีที่ p เป็นเท็จและ q เป็นจริง ดังนั้นประพจน์ที่กำหนดให้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง ให้ p และ q เป็นประพจน์ จงพิจารณาว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

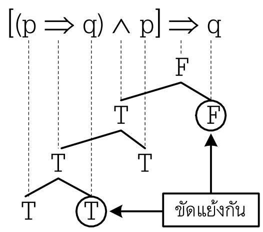
วิธีทำ สมมติว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ เป็นเท็จ

จะได้ว่า $\begin{cases} (p \Rightarrow q) \wedge p & \text{เป็นจริง} \quad ...(1) \\ q & \text{เป็นเท็จ} \quad ...(2) \end{cases}$

จาก (1) จะได้ $\begin{cases} p \Rightarrow q & \text{เป็นจริง} \quad ...(3) \\ p & \text{เป็นจริง} \quad ...(4) \end{cases}$

จาก (3) และ (4) จะได้ว่า q ต้องเป็นจริง ซึ่งขัดแย้งกับ (2) แสดงว่าที่สมมติว่า$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ เป็นเท็จนั้นเป็นไปไม่ได้ ต้องเป็นจริงเสมอ ดังนั้น $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

คำอธิบายข้างบนนี้อาจเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้



5. กฎของตรรกศาสตร์

สัจนิรันดร์ต่อไปนี้เป็นกฎของตรรกศาสตร์ที่ใช้ในการอ้างเหตุผล

1. **กฎนิเสธซ้อน** $\sim(\sim p) \equiv p$ กฎข้อนี้บอกว่าใช้ p แทน $\sim(\sim p)$ ได้

2. **กฎไม่มีความเป็นกลาง** $p \vee \sim p$ กฎข้อนี้บอกว่าไม่ p ก็ $\sim p$ ต้องเป็นจริง

3. **การอ้างเหตุผลโดยตรง** $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ กฎข้อนี้ใช้เป็นรูปแบบของการอ้างเหตุผลโดยตรง กล่าวคือ ถ้าทราบว่า $p \Rightarrow q$ เป็นจริงและทราบหรือแสดงได้ว่า p เป็นจริงแล้วสามารถสรุปได้ว่า q เป็นจริง

4. **การอ้างเหตุผลโดยอ้อม** $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ กฎข้อนี้ใช้เป็นรูปแบบของการอ้างเหตุผลโดยอ้อม กล่าวคือ ถ้าทราบว่า $p \Rightarrow q$ เป็นจริง และทราบหรือแสดงได้ว่า q เป็นเท็จ ($\sim q$ เป็นจริง) แล้วสามารถสรุป ได้ว่า p เป็นเท็จ ($\sim p$ เป็นจริง)

5. **กฎการถ่ายทอด** $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ กฎข้อนี้บอกว่า ถ้าทราบว่า $p \Rightarrow q$ เป็นจริง และทราบหรือแสดงได้อีกว่า $q \Rightarrow r$ เป็นจริง แล้วสามารถสรุปได้ว่า $p \Rightarrow r$ เป็นจริง

6. **กฎแย้งสลับที่** $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ กฎข้อนี้บอกว่าใช้ $\sim q \Rightarrow \sim p$ แทน $p \Rightarrow q$ ได้

7. **ตรรกบทแบบคัดออก** $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$ กฎข้อนี้บอกว่า ถ้าทราบว่า $p \vee q$ เป็นจริง และทราบหรือแสดงได้ว่า p เป็นเท็จ ($\sim p$ เป็นจริง) แล้วสามารถสรุปได้ว่า q เป็นจริง

6. ประโยคเปิด

ประโยคเปิด คือ ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีตัวแปรและไม่เป็นประพจน์ แต่เมื่อแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์หรือเติมตัวบ่งปริมาณแล้วได้ประพจน์ เช่น

$x^2 < 3$ เป็นประโยคเปิด เพราะไม่สามารถระบุค่าความจริงให้ชัดเจนว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

$2^2 < 3$ เป็นประพจน์ที่เกิดจากการแทนตัวแปรในประโยคเปิดข้างบนด้วย 2

มี $x \in R$ ซึ่ง $x^2 < 3$ เป็นประพจน์ที่เกิดจากการเติมตัวบ่งปริมาณ “มี $x \in R$”

7. ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

1. ให้ x เป็นตัวแปรในประโยคเปิด P(x) และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ การบ่งบอกว่ามีสมาชิกใน U ที่สอดคล้องกับ P(x) กี่ตัว กระทำได้โดยใช้ตัวบ่งปริมาณตัวใดตัวหนึ่งต่อไปนี้

ตัวบ่งปริมาณ	สัญลักษณ์	วัตถุประสงค์

สำหรับ x ทุกตัว	$\forall x$	เพื่อบ่งบอกว่าสมาชิก**ทุกตัว** ใน U สอดคล้องกับ P(x)
สำหรับ x บางตัว	$\exists x$	เพื่อบ่งบอกว่า**มี**สมาชิก**อย่างน้อย 1 ตัว** ใน U ที่สอดคล้องกับ P(x)

2. ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณมีส่วนประกอบ 3 ส่วน คือ ประโยคเปิด ตัวบ่งปริมาณ $\forall$ หรือ $\exists$ และเอกภพสัมพัทธ์ U รูปแบบของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณของตัวแปรตัวเดียวมี 2 แบบ และกำหนดค่าความจริงดังนี้

รูปแบบประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ	ค่าความจริง
$\forall x \in U[P(x)]$	**เป็นจริง**ก็ต่อเมื่อแทนตัวแปร x ในประโยคเปิด P(x) ด้วยสมาชิกแต่ละตัวใน U แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริงเสมอ **เป็นเท็จ**ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัวใน U ซึ่งเมื่อแทนตัวแปร x ในประโยคเปิด P(x) แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จ
$\exists x \in U[P(x)]$	**เป็นจริง**ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัวใน U ซึ่งเมื่อแทนตัวแปร x ในประโยคเปิด P(x) แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง **เป็นเท็จ**ก็ต่อเมื่อแทนตัวแปร x ในประโยคเปิด P(x) ด้วยสมาชิกแต่ละตัวใน U แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จเสมอ

3. ประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณของตัวแปร 2 ตัว มี 4 แบบ และกำหนดค่าความจริงดังนี้

รูปแบบประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ	ค่าความจริง
$\forall x \forall y[P(x, y)]$	**เป็นจริง**ก็ต่อเมื่อแทนตัวแปร x และ y ในประโยคเปิด P(x, y) ด้วยสมาชิกใดๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริงเสมอ **เป็นเท็จ**ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์อย่างน้อย 1 คู่ เช่น a และ b ซึ่งเมื่อแทนตัวแปร x และ y ตามลำดับ จะได้ประพจน์ P(a, b) ที่เป็นเท็จ
$\forall x \exists y[P(x, y)]$	**เป็นจริง**ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ที่ใช้แทน x ในประโยคเปิด จะมีสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ซึ่งแทน y แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง **เป็นเท็จ**ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์อย่างน้อย 1 ตัวที่ใช้แทน x ในประโยคเปิดแล้ว ไม่ว่าจะใช้สมาชิกตัวใดในเอกภพสัมพัทธ์แทน y จะได้ประพจน์ที่เป็นเท็จเสมอ
$\exists x \forall y[P(x, y)]$	**เป็นจริง**ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์อย่างน้อย 1 ตัวที่ใช้แทน x ในประโยคเปิดแล้ว ไม่ว่าจะใช้สมาชิกตัวใดในเอกภพสัมพัทธ์แทน y จะได้ประพจน์ที่เป็นจริงเสมอ **เป็นเท็จ**ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์ที่ใช้แทน x ในประโยคเปิดจะมีสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์อย่างน้อย 1 ตัว ที่ใช้แทน y แล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จ
$\exists x \exists y[P(x, y)]$	**เป็นจริง**ก็ต่อเมื่อมีสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์อย่างน้อย 1 คู่ ที่ใช้แทน x และ y ในประโยคเปิด แล้วได้ประพจน์ที่เป็นจริง

	เป็นเท็จก็ต่อเมื่อสมาชิกแต่ละคู่ในเอกภพสัมพัทธ์เมื่อใช้แทน x และ y ในประโยคเปิดแล้วได้ประพจน์ที่เป็นเท็จเสมอ

4. นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ
   1. $\sim\forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$ [เปลี่ยน $\forall$ เป็น $\exists$, เปลี่ยน P(x) เป็น ~P(x)]
   2. $\sim\exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$ [เปลี่ยน $\exists$ เป็น $\forall$, เปลี่ยน P(x) เป็น ~P(x)]
   3. $\sim\forall x\forall y[P(x, y)] \equiv \exists x\exists y[\sim P(x, y)]$
   4. $\sim\forall x\exists y[P(x, y)] \equiv \exists x\forall y[\sim P(x, y)]$
   5. $\sim\exists x\forall y[P(x, y)] \equiv \forall x\exists y[\sim P(x, y)]$
   6. $\sim\exists x\exists y[P(x, y)] \equiv \forall x\forall y[\sim P(x, y)]$

8. การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล คือ การอ้างว่าถ้าข้อความชุดหนึ่ง คือ $p_1, p_2, \dots, p_n$ เป็นจริงทุกข้อความแล้วสามารถสรุปว่าข้อความ c เป็นจริงได้หรือไม่ นั่นคือ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow c$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ ถ้าเป็นจะกล่าวว่าการอ้างเหตุผลนั้น**สมเหตุสมผล** ถ้าไม่เป็นจะกล่าวว่าการอ้างเหตุผลนั้น**ไม่สมเหตุสมผล**

การตัดสินว่าการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้สมเหตุสมผลหรือไม่ อาจใช้กฎของตรรกศาสตร์ในข้อ 5

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \Rightarrow q$
2. q

ผล p

วิธีทำ พิจารณาว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

สมมติว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ เป็นเท็จ

จะได้ว่า $\begin{cases} (p \Rightarrow q) \wedge q & \text{เป็นจริง} \quad \dots(1) \\ p & \text{เป็นเท็จ} \quad \dots(2) \end{cases}$

จาก (1) จะได้ $\begin{cases} p \Rightarrow q & \text{เป็นจริง} \quad \dots(3) \\ q & \text{เป็นจริง} \quad \dots(4) \end{cases}$

จะเห็นได้ว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ เป็นเท็จได้ เมื่อ p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง

เนื่องจาก $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้นการอ้างเหตุผลที่กำหนดให้ไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. $p \Rightarrow q$
2. $q \Rightarrow s$
3. $\sim s$

ผล $\sim p \vee s$

วิธีทำ พิจารณาว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge \sim s] \Rightarrow (\sim p \vee s)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

สมมติว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge \sim s] \Rightarrow (\sim p \vee s)$ เป็นเท็จ

จะได้ว่า $\begin{cases} (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge \sim s & \text{เป็นจริง} \quad \dots(1) \end{cases}$

$\sim p \vee s$ เป็นเท็จ ...(2)

จาก (1) จะได้ $\left\{\begin{array}{r} (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s) \\ \sim s \end{array}\right.$ เป็นจริง ...(3) / เป็นจริง ...(4)

จาก (3) จะได้ $p \Rightarrow s$ เป็นจริง ...(5) [กฎการถ่ายทอด]

จาก (4) และ (5) จะได้ $\sim p$ เป็นจริง ...(6) [การอ้างเหตุผลโดยอ้อม]

จาก (6) จะได้ $\sim p \vee s$ เป็นจริง ...(7)

(2) และ (7) ขัดแย้งกัน แสดงว่า $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge \sim s] \Rightarrow (\sim p \vee s)$ เป็นเท็จไม่ได้
นั่นคือ $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge \sim s] \Rightarrow (\sim p \vee s)$ ต้องเป็นจริงเสมอและเป็นสัจนิรันดร์
ดังนั้น การอ้างเหตุผลที่กำหนดให้สมเหตุสมผล

แบบทดสอบ

1. ให้ p, q, r, s เป็นประพจน์ ถ้า $[(p \Rightarrow \sim q) \vee r] \wedge (q \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $(p \wedge s) \Rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วประพจน์ในข้อใดมีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

*1) $p \Rightarrow q$ 2) $q \Rightarrow r$ 3) $r \Rightarrow s$ 4) $s \Rightarrow p$

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนเต็มแล้วข้อความ $\exists m \exists n[5m + 7n = 1]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. นิเสธของข้อความ $\forall x \exists y[(x^2 - 2x \geq y - 2) \wedge (y \geq \sin x)]$ คือ
$\exists x \forall y[(x^2 - 2x < y - 2) \vee (y < \sin x)]$

ข้อใด**ถูก**

*1) ก. และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. และ ข. ผิด

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้าประพจน์ $[p \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว $(p \wedge q) \Rightarrow s$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข. นิเสธของข้อความ $\forall x \exists y[(x > y) \wedge (x^2 < y)]$ คือ $\exists x \forall y[(x > y) \Rightarrow (y \leq x^2)]$

ข้อใด**ถูก**

1) ก. และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด *3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. และ ข. ผิด

4. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือช่วงเปิด $(-2, 2)$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ประพจน์ $\forall x[|x + x^2| \leq |x| + x^2$ และ $x \leq x^2]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. ประพจน์ $\exists x[x^2 - x - 6 \geq 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใด**ถูก**

1) ก. และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก *4) ก. และ ข. ผิด

5. กำหนดให้ประพจน์ $(\sim p \Leftrightarrow \sim r) \vee (p \Leftrightarrow q))$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ประพจน์ในข้อใดมีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

1) $\sim p \Rightarrow (q \vee r)$ 2) $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$ 3) $(p \vee q) \vee \sim r$ *4) $(p \wedge q) \wedge \sim r$

6. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ประพจน์ $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ เป็นสัจนิรันดร์

ข. มีจำนวนจริง a อยู่ในช่วง $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ทำให้ประโยค $\exists x[x^2 + x + a = 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ คือ $U = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

ข้อใด**ถูก**

*1) ก. และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก 4) ก. และ ข. ผิด

7. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก. เหตุ 1. $p \wedge q$
2. $(q \vee r) \Rightarrow (s \wedge p)$
3. $p \Rightarrow \sim r$
ผล $s \wedge \sim r$

ข. เหตุ 1. $P(x) \Rightarrow \sim Q(x)$
2. $Q(x) \vee R(x)$
ผล $P(x) \Rightarrow R(x)$

ข้อใด**ถูก**

*1) ก. และ ข. สมเหตุสมผลทั้งคู่ 2) ก. สมเหตุสมผล แต่ ข. ไม่สมเหตุสมผล

3) ก. ไม่สมเหตุสมผล แต่ ข. สมเหตุสมผล 4) ก. และ ข. ไม่สมเหตุสมผลทั้งคู่

8. กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ในการอ้างเหตุผล ถ้า**เหตุ** คือ

1. $(p \vee q) \Rightarrow r \wedge s$ และ 2. $r \Rightarrow \sim s$

แล้วข้อใดเป็น**ผล**ที่ทำให้การอ้างเหตุผลมีความสมเหตุสมผล

1) p 2) q *3) $\sim p \wedge \sim q$ 4) $\sim p \wedge q$

9. ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $[(p \wedge \sim r) \wedge q] \Rightarrow \sim(p \wedge q)$ เป็นเท็จแล้ว $(p \vee q) \Rightarrow r$ เป็นจริง

ข. ถ้า $q \vee \sim r$ เป็นเท็จแล้ว $[p \vee (q \Rightarrow r)] \Rightarrow \sim q$ เป็นเท็จ

ข้อใด**ถูก**

1) ก. และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก *4) ก. และ ข. ผิด

10. กำหนดให้ P(x) และ Q(x) เป็นประโยคเปิด โดยที่ $\forall x[P(x)] \Rightarrow \exists x[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง ข้อใดมีค่าความจริงเป็น**จริง**

*1) $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$ 2) $\exists x[\sim P(x) \vee \sim Q(x)]$

3) $\forall x[P(x) \Rightarrow \sim Q(x)]$ 4) $\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)]$

เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

1. เมตริกซ์และการเท่ากัน

1. **เมตริกซ์** ประกอบด้วยจำนวนจริง (หรือจำนวนเชิงซ้อนหรือฟังก์ชัน) ชุดหนึ่งเขียนเรียงกันเป็นแถว (แนวนอน) และคอลัมน์ (แนวตั้ง) อยู่ภายในวงเล็บ ( ) หรือ [ ] เมตริกซ์ที่มี m แถว และ n คอลัมน์ เรียกว่า **เมตริกซ์มิติ $m \times n$** หรือ **$m \times n$ เมตริกซ์** เมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนคอลัมน์ เรียกว่า **เมตริกซ์จัตุรัส** จำนวนหรือฟังก์ชันที่บรรจุอยู่ในเมตริกซ์ เรียกว่า **สมาชิก** หรือ **ส่วนประกอบ**ของเมตริกซ์

เมตริกซ์ A มิติ $m \times n$ ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j เป็น a_{ij} อาจเขียนในรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

หรือเขียนแบบกะทัดรัดเป็น $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

2. **การเท่ากันของเมตริกซ์** เมตริกซ์ A และ B เท่ากันก็ต่อเมื่อ A และ B มีมิติเดียวกัน และสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

3. **เมตริกซ์ศูนย์** คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็น 0 เขียนแทนด้วย $\underline{0}$ เช่น $\underline{0}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. **เมตริกซ์เอกลักษณ์** คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก (บนซ้ายไปล่างขวา) เป็น 1 นอกนั้นเป็น 0 เขียนแทนด้วย I เช่น $I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. การบวกและการลบเมตริกซ์

1. เมตริกซ์ A และ B **บวกกันได้** ถ้า A และ B มีมิติเดียวกัน ผลบวกของ A และ B เขียนแทนด้วย A + B คือ เมตริกซ์ที่ได้จากการบวกสมาชิกของ A และ B ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน

2. **นิเสธ**ของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย –A คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนตรงข้ามกับสมาชิกของ A ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน นิเสธของ A เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า**อินเวอร์สการบวกของ A**

3. เมตริกซ์ A และ B **ลบกันได้** ถ้า A และ B มีมิติเดียวกัน และ $A - B = A + (-B)$ ดังนั้น A – B หาได้จากการลบสมาชิกของ A ด้วยสมาชิกของ B ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน

4. การบวกเมตริกซ์มีสมบัติหลายอย่างคล้ายกับการบวกจำนวนจริง

ให้ A, B, C เป็นเมตริกซ์มิติเดียวกัน

1. $A + B = B + A$	สมบัติการสลับที่
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$	สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
3. $A + \underline{\mathbf{0}} = A = \underline{\mathbf{0}} + A$	สมบัติของเมตริกซ์ศูนย์
4. $A + (-A) = \underline{\mathbf{0}} = (-A) + A$	สมบัติของอินเวอร์สการบวก
5. ถ้า $A = B$ แล้ว $A + C = B + C$ และ $A - C = B - C$	สมบัติการบวกและการลบ
6. ถ้า $A + C = B + C$ แล้ว $A = B$	สมบัติการตัดออกของการบวก

3. การคูณแบบสเกลาร์

1. ผลคูณของจำนวน k กับเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย kA หรือ Ak คือ เมตริกซ์ที่ได้จากการคูณสมาชิกแต่ละตัวของ A ด้วย k เรียกจำนวน k นี้ว่า**สเกลาร์** และเรียกการคูณแบบนี้ว่า **การคูณแบบสเกลาร์**

2. การคูณแบบสเกลาร์มีสมบัติต่อไปนี้

ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์มิติเดียวกัน และ k และ m เป็นจำนวนจริง (สเกลาร์) จะได้ว่า

1. $k(mA) = (km)A$
2. $(k + m)A = kA + mA$
3. $k(A + B) = kA + kB$
4. ถ้า $A = B$ แล้ว $kA = kB$

4. การคูณเมตริกซ์

1. สำหรับการคูณเมตริกซ์ A และ B จะมีผลคูณ AB ก็ต่อเมื่อจำนวนคอลัมน์ของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B และ AB จะมีมิติเท่ากับ (จำนวนแถวของ A) × (จำนวนคอลัมน์ของ B) นั่นคือ

$$A_{m\times p}\,B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

ถ้า AB = C แล้วสมาชิกในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของ C คือ C_{ij} เท่ากับผลคูณของแถวที่ i ของ A กับคอลัมน์ที่ j ของ B โดยมีวิธีคูณดังนี้

$$\begin{aligned} C_{ij} &= [a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \dots\ \ a_{ip}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} \\ &= a_{i1}\,b_{1i} + a_{i2}\,b_{2j} + \dots + a_{ip}\,b_{pj} \end{aligned}$$

เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ AB เป็นเมตริกซ์มิติ 2×2

$$AB = \begin{bmatrix} [1\ \ -1\ \ 0]\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} & [1\ \ -1\ \ 0]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \\ [2\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} & [2\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. การคูณเมตริกซ์มีสมบัติดังนี้

ถ้า A, B และ C เป็นเมตริกซ์ที่บวกกันได้และคูณกันได้ และ k เป็น สเกลาร์ จะได้ว่า

1. $(AB)C = A(BC)$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
2. $A(B + C) = AB + AC$ สมบัติการแจกแจง
   $(B + C)A = BA + CA$
   $A(B - C) = AB - AC$
   $(B - C)A = BA - CA$
3. ถ้า $A = B$ แล้ว $CA = CB$ และ $AC = BC$ สมบัติการคูณของการเท่ากัน
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
5. $I_{m\times m} A_{m\times n} = A_{m\times n}$ สมบัติของเมตริกซ์เอกลักษณ์
   $A_{m\times n} I_{n\times n} = A_{m\times n}$

ข้อควรระวัง การคูณเมตริกซ์ไม่มีสมบัติบางอย่างที่มีในระบบจำนวน

1. การคูณเมตริกซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่ (AB และ BA อาจไม่เท่ากัน)
2. การคูณเมตริกซ์ไม่มีสมบัติการตัดออก (ถ้า $AC = BC$ หรือ $CA = CB$ แล้ว A และ B อาจไม่เท่ากัน)
3. การคูณเมตริกซ์ไม่มีสมบัติของตัวประกอบศูนย์ (ถ้า $AB = \underline{0}$ แล้วไม่จำเป็นที่ A หรือ B จะต้องเป็น $\underline{0}$)

5. ทรานสโพสของเมตริกซ์

1. **ทรานสโพส**ของเมตริกซ์ A มิติ $m \times n$ เขียนแทนด้วย A^t คือเมตริกซ์มิติ $n \times m$ ที่ได้จากการเปลี่ยนแถวที่ i ของ A เป็นคอลัมน์ที่ i ของ A^t หรือเปลี่ยนคอลัมน์ที่ j ของ A เป็นแถวที่ j ของ A^t เช่น

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$ แล้วจะได้ $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{bmatrix}$

2. ทรานสโพสของเมตริกซ์มีสมบัติต่อไปนี้

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$ และ $(A - B)^t = A^t - B^t$
3. $(AB)^t = B^tA^t$ ควรระวังว่า $(AB)^t \neq A^tB^t$
4. $(kA)^t = kA^t$ เมื่อ k เป็นจำนวนใดๆ

6. ดีเทอร์มิแนนต์

1. ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ใดๆ **ดีเทอร์มิแนนต์**ของ A เขียนแทนด้วย det(A) หรือ |A| มีค่าเป็นจำนวนๆ หนึ่ง ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์มิติ 2×2 และ 3×3 มีวิธีการหาง่ายๆ ดังนี้

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้ว

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- คูณทแยงลงไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย
- คูณทแยงขึ้นต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย
- นำผลคูณที่ได้บวกกัน

เช่น $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 15 = 27$

$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = -27 - 10 = -37$

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ แล้ว

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

- เติมคอลัมน์ที่ 1 และ 2 ต่อท้าย
- คูณทแยงลงไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย
- คูณทแยงขึ้นต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย
- นำผลคูณที่ได้บวกกัน

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

2. สำหรับดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์มิติ $n \times n$ เมื่อ $n > 3$ ไม่สามารถหาโดยวิธีคูณทแยงต้องใช้วิธีกระจายโคแฟกเตอร์

1. **ไมเนอร์**ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ M_{ij} (A)ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของ det(A)

เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ จะได้

$$M_{11}(A) = \text{ไมเนอร์ของ } a_{11} = \det\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = (5)(9)-(8)(6) = -3$$

$$M_{12}(A) = \text{ไมเนอร์ของ } a_{12} = \det\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = (4)(9)-(7)(6) = -6$$

$M_{23}(A) =$ ไมเนอร์ของ $a_{23} = \det\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1&2\\7&8\end{bmatrix} = (1)(8)-(7)(2) = -6$

2. **โคแฟกเตอร์**ของ a_{ij} แทนด้วย $C_{ij}(A)$ คือ $(-1)^{i+j}M_{ij}(A)$เมื่อ $M_{ij}(A)$ คือไมเนอร์ของ a_{ij} เช่น ถ้า A คือ เมตริกซ์ในตัวอย่างข้างบน จะได้

$C_{11}(A) =$ โคแฟกเตอร์ของ $a_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}$

$C_{12}(A) =$ โคแฟกเตอร์ของ $a_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}$

$C_{23}(A) =$ โคแฟกเตอร์ของ $a_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}$

3. รูปกระจายของโคแฟกเตอร์ สำหรับเมตริกซ์ A มิติ $n \times n$ โดยใช้แถวที่ i คือ

$$a_{i1}\,C_{i1}(A) + a_{i2}\,C_{i2}(A) + \dots + a_{in}\,C_{in}(A)$$

4. รูปกระจายของโคแฟกเตอร์สำหรับเมตริกซ์ A มิติ $n \times n$ โดยใช้คอลัมน์ที่ j คือ

$$a_{1j}\,C_{1j}(A) + a_{2j}\,C_{2j}(A) + \dots + a_{nj}\,C_{nj}(A)$$

5. รูปกระจายของโคแฟกเตอร์สำหรับเมตริกซ์ A มิติ $n \times n$ มีค่าเท่ากันเสมอไม่ว่าจะใช้แถวใดหรือคอลัมน์ใด

6. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ A มิติ $n \times n$ ใดๆ มีค่าเท่ากับรูปกระจายของโคแฟกเตอร์ สำหรับ A โดยใช้แถวใดหรือคอลัมน์ใดก็ได้ (ควรใช้แถวหรือคอลัมน์ที่มี 0 จำนวนมากที่สุด จะช่วยให้คำนวณได้เร็ว)

ตัวอย่าง จงหา det (A) เมื่อ $A = \begin{bmatrix}1&2&-1&0\\1&0&0&3\\1&0&-1&4\\3&0&1&1\end{bmatrix}$

วิธีทำ ควรหา det (A) จากรูปกระจายของโคแฟกเตอร์ของ A โดยใช้คอลัมน์ที่ 2 เพราะมี 0 ถึง 3 ตัว

$$\det(A) = (2)C_{12}(A) + (0)C_{22}(A) + (0)C_{32}(A) + (0)\,C_{42}(A)$$

$$= 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&0&3\\1&-1&4\\3&1&1\end{vmatrix}$$

แต่ $\begin{vmatrix}1&0&3\\1&-1&4\\3&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&0\\1&-1\\3&1\end{matrix} = (-1)+0+3+9-4+0 = 7$

ดังนั้น det (A) $= 2(-7) = -14$

7. สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์

สมบัติต่อไปนี้ของดีเทอร์มิแนนต์ช่วยให้สามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ได้เร็วขึ้น

1. ถ้า A เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมมิติ $n \times n$ แล้วดีเทอร์มิแนนต์ของ A เท่ากับผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก ($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$) นั่นคือ

$\det(A) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$

เมตริกซ์สามเหลี่ยมมิติ $n \times n$ คือ เมตริกซ์มิติ $n \times n$ ซึ่งสมาชิกทุกตัวใต้หรือเหนือแนวทแยงมุมหลักเป็น 0 ทั้งหมด

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A) = (1)(-1)(5) = -5$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(B) = (2)(4)(1)(8) = 64$

2. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ซึ่งมีแถวใดแถวหนึ่งหรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งเป็น 0 ทุกตัว แล้ว $\det(A) = 0$

3. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ แล้ว $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

4. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ แล้วดีเทอร์มิแนนต์ของทรานสโพสของ A เท่ากับดีเทอร์มิแนนต์ของ A นั่นคือ $\det(A^t) = \det(A)$

5. ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ และมีแถวใดแถวหนึ่งเท่ากับค่าคงตัวคูณกับอีกแถวหนึ่ง (หรือคอลัมน์หนึ่งเท่ากับค่าคงตัวคูณกับอีกคอลัมน์หนึ่ง) แล้ว $\det(A) = 0$ เช่น

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & 15 \end{vmatrix} = 0$ เพราะแถวที่ 3 เท่ากับ 3 คูณแถวที่ 1

6. การสลับ 2 แถวใดๆ (หรือ 2 คอลัมน์ใดๆ) ของดีเทอร์มิแนนต์ (1 ครั้ง) จะได้ดีเทอร์มิแนนต์ที่มีค่าเป็นจำนวนตรงข้าม เช่น

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ (สลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2)

7. คูณ (หรือหาร) แถวหนึ่ง (หรือคอลัมน์หนึ่ง) ของดีเทอร์มิแนนต์ด้วยค่าคงตัวที่ไม่เท่ากับ 0 แล้วนำผลที่ได้ไปบวก (หรือลบ) กับอีกแถวหนึ่ง (หรืออีกคอลัมน์หนึ่ง) จะได้ดีเทอร์มิแนนต์ที่มีค่าเท่าเดิม เช่น

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ (ใช้ 2 คูณแถวที่ 1 แล้วนำไปลบแถวที่ 2)

8. แยกตัวประกอบ k ออกจากแถวที่ i (หรือคอลัมน์ที่ j) แล้วคูณดีเทอร์มิแนนต์ที่ได้ด้วย k จะมีค่าเท่ากับดีเทอร์มิแนนต์เดิม เช่น

$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$ (แยกตัวประกอบ 2 จากคอลัมน์ที่ 1)

9. ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ใดๆ และ k เป็นจำนวนใดๆ แล้ว $\det(kA) = k^n \det(A)$

หมายเหตุ สมบัติข้อ 6–8 นี้อาจใช้เปลี่ยนรูปดีเทอร์มิแนนต์ที่กำหนดให้เป็นดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์สามเหลี่ยมซึ่งหาค่าได้ง่าย

8. อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

1. อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์จัตุรัส A เขียนแทนด้วย A^{-1} คือ เมตริกซ์จัตุรัสมิติเดียวกันกับ A ซึ่งมีสมบัติ $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

เมตริกซ์จัตุรัสไม่ได้มีอินเวอร์สการคูณทุกเมตริกซ์ เมตริกซ์จัตุรัส A จะมีอินเวอร์สการคูณก็ต่อเมื่อ det (A) $\neq$ 0 ถ้า det (A) = 0 แล้ว A ไม่มีอินเวอร์สการคูณเรียกว่า **เมตริกซ์เอกฐาน** เมตริกซ์จัตุรัสที่**มี**อินเวอร์สการคูณเรียกว่า **เมตริกซ์ไม่เอกฐาน**

2. อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์จัตุรัส A มิติ 2 × 2 ซึ่ง det (A) $\neq$ 0 มีวิธีการหาดังนี้

สลับตำแหน่งของ a_{11} และ a_{22}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

เปลี่ยนเครื่องหมายของ a_{12} และ a_{21}

3. อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์จัตุรัส A มิติ n × n ซึ่ง det (A) $\neq$ 0 มีวิธีการหาดังนี้

1. แทนสมาชิก a_{ij} แต่ละตัวของ A ด้วยโคแฟกเตอร์ C_{ij} จะได้**โคแฟกเตอร์เมตริกซ์**ของ A แทนด้วย cof (A)

2. หาทรานสโพสของโคแฟกเตอร์เมตริกซ์ของ A จะได้**เมตริกซ์ผูกพัน**หรือ**แอดจอยท์เมตริกซ์**ของ A เขียนแทนด้วย adj (A) นั่นคือ

$$\text{adj}(A) = [\text{cof}(A)]^t$$

3. อินเวอร์สการคูณของ A เท่ากับ $\frac{1}{\det(A)}$ คูณกับเมตริกซ์ผูกพันของ A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\text{adj}(A)$$

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 หา det (A) เพื่อตรวจสอบว่ามี A^{-1} หรือไม่

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (1)(1)(3) = 3$$ (ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์สามเหลี่ยม)

เนื่องจาก det (A) $\neq$ 0 ดังนั้น มี A^{-1}

ขั้นที่ 2 หาโคแฟกเตอร์เมตริกซ์และเมตริกซ์ผูกพันของ A

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}$$

$C_{11}(A) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3,\ C_{12}(A) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,\ C_{13}(A) = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$

$C_{21}(A) = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6,\ C_{22}(A) = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3,\ C_{23}(A) = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$

$C_{31}(A) = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ C_{32}(A) = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ C_{33}(A) = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

จะได้ $\mathrm{adj}\,(A) = [\mathrm{cof}\,(A)]^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 3 หาอินเวอร์สการคูณของ A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}\,(A) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

4. สมบัติของอินเวอร์สการคูณ

1. ถ้า A มีอินเวอร์สการคูณแล้ว $(A^{-1})^{-1} = A$
2. ถ้า A และ B มีอินเวอร์สการคูณและมีมิติเดียวกัน แล้ว AB มีอินเวอร์สการคูณ และจะได้ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ สังเกตว่า $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$ ในกรณีทั่วไป
   ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_m$ มีอินเวอร์สการคูณและมีมิติเดียวกันแล้ว
   $$(A_1 A_2 \ldots A_{m-1} A_m)^{-1} = A_m^{-1} A_{m-1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$$
3. ถ้า A มีอินเวอร์สการคูณและ AB = AC (หรือ BA = CA) แล้ว B = C (สังเกตว่ากฎการตัดออกสำหรับการคูณเมตริกซ์ใช้ได้เฉพาะเมื่อตัวประกอบร่วมที่จะตัดออกเป็นเมตริกซ์ที่มีอินเวอร์สการคูณ)
4. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
5. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
6. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$ ที่มีอินเวอร์สการคูณแล้ว $\det(\mathrm{adj}\,(A)) = [\det(A)]^{n-1}$

9. การแก้ระบบสมการเชิงเส้น

1. **ระบบสมการเชิงเส้น** เช่น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

เขียนในรูปแบบสมการเมตริกซ์ได้เป็น AX = B เมื่อ

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ เรียกว่า **เมตริกซ์สัมประสิทธิ์**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ เรียกว่า **เมตริกซ์ตัวแปร**

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ เรียกว่า **เมตริกซ์ค่าคงตัว**

เมื่อนำเมตริกซ์ค่าคงตัวเติมเข้าไปใน A ต่อจากคอลัมน์สุดท้าย จะได้

$$A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$ เรียกว่า **เมตริกซ์แต่งเติม**

2. การแก้ระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ ในกรณีที่ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส (จำนวนตัวแปรเท่ากับจำนวนสมการ) อาจใช้วิธีต่อไปนี้

วิธีที่ 1 ใช้กฎของคราเมอร์ (ใช้ดีเทอร์มิแนนต์)

1. ถ้า A เป็นเมตริกซ์มิติ $n \times n$ และ $\det(A) \neq 0$ แล้วคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะมีชุดเดียว โดยมี $x_i = \dfrac{\det(B_i)}{\det(A)}$

เมื่อ B_i คือเมตริกซ์ที่ได้จากการใช้คอลัมน์ B แทนคอลัมน์ที่ i ของ A

2. ถ้า $\det(A) = 0$ และมี $\det(B_i) \neq 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ อย่างน้อย 1 ค่าแล้วระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ ไม่มีคำตอบ

3. ถ้า $\det(A) = 0$ และ $\det(B_i) = 0$ สำหรับทุกค่าของ $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้วระบบสมการเชิงเส้นอาจมีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วนหรือไม่มีคำตอบ

วิธีที่ 2 ใช้อินเวอร์สการคูณ

ถ้า A เป็นเมตริกซ์มิติ $n \times n$ และ $\det(A) \neq 0$ แล้วจะมีอินเวอร์สการคูณ A^{-1} และคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ คือ $X = A^{-1}B$

แบบทดสอบ

1. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

ถ้า A เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $2AB = I$ และ $AX = C$ แล้ว $x + y + z$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

*1) 20 2) 24 3) 26 4) 30

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -9 \\ 7 & -10 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ B, C, D เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง A~B~C~D

โดย B ได้จาก A โดยการดำเนินการ $R_1 - \frac{4}{3}R_2$

C ได้จาก B โดยการดำเนินการ $5R_1$

D ได้จาก C โดยการดำเนินการ R_{23}

แล้ว det (D) เท่ากับข้อใด

1) −3750 2) −150 *3) 150 4) 3750

3. ให้ x, y, z เป็นคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 2$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 1$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

ถ้า $\left[\begin{array}{ccc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$ แล้ว x + y + z มีค่าเท่ากับเท่าใด

(ตอบ 6)

4. กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 และ A_{ij} คือเมตริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และคอลัมน์ที่ j ของเมตริกซ์ A ออก

ถ้า $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -28 & 10 & -1 \\ 17 & -5 & -1 \end{bmatrix}$, $A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ และ $A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

แล้ว det (A) มีค่าเท่ากับข้อใด

1) −92 *2) −15 3) 15 4) 92

5. ให้ A, B เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 ถ้า AB = 3I โดยที่ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์และ $\text{adj } B = \frac{1}{3}A$ แล้ว det (A) มีค่าเท่ากับเท่าใด **(ตอบ 27)**

6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & a-2 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

ถ้า M_{11} (A) = 5 และ M_{33} (A) = 0 แล้วพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. det (A) = 11

ข. C_{13} (A) = −1

ข้อใด**ถูก**

1) ก. และ ข. ถูก 2) ก. ถูก และ ข. ผิด 3) ก. ผิด และ ข. ถูก *4) ก. และ ข. ผิด

7. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & a \end{bmatrix}$

ถ้า $a > 10$ และ $\det(\operatorname{adj} A) = 225$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 11 2) 12 *3) 13 4) 14

8. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 2a+\sqrt{6} \\ 6 & a & 3 \\ a & 2 & a \end{bmatrix}$

ถ้า $M_{11}(A) = 18$ และ $M_{22}(A) = -12$ แล้ว $C_{31}(A)$ เท่ากับข้อใด

1) −57 *2) −33 3) −15 4) −3

9. กำหนดให้ A และ B เป็นเมตริกซ์มิติ 2×2 ถ้า $A + 2B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$ และ $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

แล้ว $\det(2A^{-1}B)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด **(ตอบ 8)**

10. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x+2 & x & x+1 \\ 0 & x & x+1 \\ x+1 & -1 & x \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & x+1 \\ 2x & 3 \end{bmatrix}$

ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\det(A) = 0$ แล้ว adj B คือเมตริกซ์ในข้อใด

1) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ *4) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$